САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

БОЗОРОВ ЗАВҚИДДИН РАВШАНОВИЧ

ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН КУЧСИЗ ГОРИЗОНТАЛ МУҲИТЛАРДА ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

Физика–математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

Бухоро – 2020

УДК: 517.958

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

БОЗОРОВ ЗАВҚИДДИН РАВШАНОВИЧ

ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН КУЧСИЗ ГОРИЗОНТАЛ МУҲИТЛАРДА ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика–математика фанлари)

Физика–математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

Бухоро – 2020

Физика–математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.2.PhD/FM459 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти Бухоро бўлинмаси ва Бухоро давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб–саҳифаси (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Дурдиев Дурдимурод Қаландарович** физика–математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Хасанов Ақназар Бекдурдиевич** физика–математика фанлари доктори, профессор
	Карчевский Андрей Леонидович физика–математика фанлари доктори, профессор (Россия)
Етакчи ташкилот:	**Ўзбекистон Миллий Университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «___»________ соат___ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231–06–32, факс: (+99866) 235–19–38, e–mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот–ресурс марказида танишиш мумкин (№__ рақам билан рўйхатга олинган). Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231–06–32, факс: (+99866) 235–19–38.

Диссертация автореферати 2020 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2020 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш илмий котиби, ф.–м.ф.д.

А.Б. Хасанов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган аксарият илмий ва амалий тадқиқотлар, изланишлар хусусий ҳосилали интегро-дифференциал тенгламалар, улар учун қўйилган тўғри ва тескари масалалар ҳамда бу масалаларни сонли ечиш усулларини ўрганишга олиб келинади. Бугунги кунда хусусий ҳосилали интегро-дифференциал тенгламалар учун тескари масалалар геология, электродинамика, тўлқин тарқалиш жараёнлари, геофизика ва бошқа кўплаб соҳалардаги тадқиқотларнинг энг кўп ўрганилаётган асосий масаласи ҳисобланади. Тўғри масала ечими ҳақида қўшимча маълумотга асосланиб, тўғри масала ечимини, интегро-дифференциал тенглама ядросини аниқлаш ва уларни сонли ечиш масаласига доир тадқиқотларни олиб бориш бугунги кунда математик физиканинг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳон миқёсида математик физиканинг энг тез ривожланаётган соҳаси – тескари масалаларни тадқиқ қилиш усулларига алоҳида эътибор қаратилмоқда. Бу соҳа физика ва техник фанлардаги энг муҳим муаммолардан бирига айланди, чунки улар бевосита аниқлаб бўлмайдиган параметрларни топишга имкон беради. Бу йўналиш жуда кўп соҳаларда татбиқга эга. Хотирага эга бўлган турли хил муҳит ва системаларда хотира функциясини сонли аниқлаш долзарб ҳисобланади. Шуни инобатга олган ҳолда, хотирали муҳитларда эластик-қовушқоқлик интегро-дифференциал тенгламалари учун қўйилган тўғри ва тескари масалаларнинг корректлигини ўрганиш, уларни тўғри математик моделлаштириш, шунингдек, бундай масалалар учун самарали ҳисоблаш алгоритмларини ишлаб чиқиш назарий, шу билан бирга, амалий жиҳатдан ҳам муҳим илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда илмий ва амалий татбиққа эга бўлган фундаментал фанларга, жумладан, математик физиканинг тескари масалалари ва уларни сонли ечишга катта эътибор қаратилмоқда. Ушбу борада гиперболик типдаги интегро-дифференциал тенгламаларда хотира ядросини аниқлаш ва уни сонли қуришга алоҳида эътибор қаратилди. Бу изланишлар натижасида гиперболик типдаги интегро-дифференциал тенгламалар учун кучсиз горизонтал муҳитларда тескари масалалар ечимининг мавжудлиги, ягоналигини исботлашга ва горизонтал қатламланган таъсирдан кейинги эластик муҳитнинг хотира функциясини аниқлашнинг сонли усулини қуришга эришилди. Дифференциал тенглама ва математик физика фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифа этиб белгиланди[1]. Бу қарор ижросини таъминлашда математик физиканинг интегро-дифференциал тенгламалар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сонли Қарори, 2018 йил 20 июлдаги «Фан ва олий таълим соҳаси ходимларининг меҳнат ҳақи миқдорини янада ошириш, илмий ва илмий-техник фаолият натижалари жорий этилишини давлат томонидан қўллаб-қувватлаш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-3876-сонли Қарори, 2018 йил 29 майдаги «Ижтимоий-иқтисодий соҳада илмий-тадқиқот институтлари фаолиятини такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-3752-сонли Қарори, 2020 йил 2 мартдаги «2017—2021-йилларда Ўзбекистон Республикасини ривожлантиришнинг бешта устувор йўналиши бўйича ҳаракатлар стратегиясини «Илм, маърифат ва рақамли иқтисодиётни ривожлантириш йили»да амалга оширишга оид давлат дастури тўғрисида»ги ПФ-5953-сонли Фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Математик физиканинг тескари масалалари назариясини ривожлантиришга А.С. Алексеев, А.В. Баев, А.Л. Бухгейм, А.В. Гончарский, В.В. Васин, С.И. Кабанихин, М.Г. Крейн, М.М. Лаврентьев, А.И. Прилепко, В.Г. Романов, А.Н. Тихонов, В.Г. Яхно ва бошқа олимлар ўз ҳиссаларини қўшганлар. Гиперболик тенгламалар ва системалар учун дастлабки динамик тескари масалалар А.С. Алексеев, М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, А.С. Благовещенский томонидан таърифланган ва тадқиқ қилинган. Гиперболик типдаги тенгламалар ва системалар учун динамик тескари масалалар тизимли тарзда В.Г.Романов томонидан тадқиқ қилинган.

Гиперболик тенгламаларда хотира ядросини аниқлаш масалалари тескари масалалар назариясида нисбатан ёш йўналишдир. Хотира (кечикиш) феномени шундай тизимларда вужудга келадики, бунда нафақат тизимнинг ҳозирги ҳолати, балки тизимнинг барча олдинги ҳолатлари ҳам ҳисобга олинади, бошқача қилиб айтганда, бу ҳодиса тизимнинг ҳозирги ва ундан олдинги ҳолатига боғлиқ. Бунга эластик-қовушқоқлик ҳодисаси мисол бўлиб, муҳитнинг деформацияси нафақат қўйилаётган кучларнинг табиатига, балки ушбу муҳит дуч келган олдинги деформацияларга ҳам боғлиқ. Дисперсияли муҳитда электромагнит тўлқинларнинг тарқалиши, математик биологиядаги ҳайвонлар ва турли хил ўсимликларнинг популяцион тизими каби ҳодисалар ҳам шу турдаги масалаларга мисол бўла олади.

Муҳитнинг хотира функциясини аниқлашнинг тўғри ва тескари масалалари анча кенг доирадаги тенгламалар учун ўрганилган. Масалан, бу йўналишда А.С. Благовещенский, Д.А. Федоренко, А.Л. Бухгейм, М. Грассели, А. Лоренци, В.Г. Романов, С.И. Кабанихин, Д.Қ. Дурдиев, В.Г. Яхно, Э.И. Шемякин ишларини мисол қилишимиз мумкин. Ушбу ишларда гиперболик ва параболик типдаги интегро-дифференциал тенгламалар ядросини аниқлаш бўйича бир ўлчовли тескари масалалар қаралган, бундан ташқари бирор соҳа чегарасида ёки тайин нуқта атрофида дельта-функцияли манбалар билан гиперболик типдаги чизиқли интегро-дифференциал тенгламалар учун кўп ўлчовли тескари масалалар ҳам қаралган. Тескари масалалар ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремалари, шартли турғунлик шартлари олинган. Шу билан бирга, жуда кам сонли ишлар бу каби тескари масалаларни сонли ечишга бағишланган. Бу борада В.И. Дмитриев, Г.В. Аккуратов, А.Г. Фатьянов, А.Л. Карчевскийларнинг ишларини мисол қилиб келтиришимиз мумкин. Кўпгина амалий масалаларда горизонтал-қатламланган муҳит моделидан фойдаланилади. Юқорида келтирилган ишлардан В.Г. Романов, Д.Қ. Дурдиев, А.С. Благовещенский, А.Л. Карчевскийларнинг ишлари масаланинг қўйилиши ва тадқиқ этиш усули жиҳатидан, шунингдек, сонли натижаларни олиш нуқтаи назаридан диссертация ишига яқин ҳисобланади.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий–тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Бухоро давлат университетининг Ф–4–02 “Математик физиканинг ҳолатлар тўплами чексиз бўлган моделлари термодинамикаси” (2017-2020й.) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади гиперболик типдаги интегро-дифференциал тенгламанинг горизонтал ўзгарувчидан кучсиз боғлиқ бўлган икки ўлчовли ядросини аниқлаш усулларини қуриш, ечимнинг ягоналигини ва бу тескари масалалар ечимлари мавжудлигини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

асосий қисмида тўлқин оператори бўлган гиперболик типдаги интегро-дифференциал тенглама учун қўйилган бошланғич-чегаравий масаланинг бир қийматли ечилишини текшириш;

тўғри масала ечими $z = 0$ да берилган ҳолда моментлар усулидан фойдаланиб, горизонтал ўзгарувчи x дан кучсиз боғлиқ бўлган махсус кўринишдаги интеграл ҳаднинг икки ўлчовли ядросини аниқлаш масаласининг глобал ечилувчанлигини кўрсатиш;

тўғри масала ечими $z = 0$ да берилган ҳолда Фурье усулидан фойдаланиб, горизонтал ўзгарувчи x дан кучсиз боғлиқ бўлган икки ўлчовли махсус ядрони аниқлаш масаласини тадқиқ қилиш;

фазовий ўзгарувчиси бўйича аналитик ва вақт ўзгарувчиси бўйича силлиқ функциялар синфида, кўчиш векторининг z компонентаси бўйича ёзилган эластик-қовушқоқлик тенгламаси учун тўғри ва тескари масалани тадқиқ қилиш, интеграл ҳаднинг ядросини тўғри масала ечимининг $z = 0$ даги қийматига кўра аниқлаш, қўйилган тескари масала бир қийматли ечилишини исботлаш ва шартли турғунлик баҳосини олиш;

горизонтал қатламланган таъсирдан кейинги эластик муҳитнинг хотира функциясини аниқлашнинг сонли усулини қуриш.

Тадқиқотнинг объекти гиперболик интегро-дифференциал тенгламалар ва эластик-қовушқоқлик тенгламасидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети горизонтал ўзгарувчидан кучсиз боғлиқ бўлган иккинчи тартибли гиперболик типдаги интегро-дифференциал тенгламалар учун икки ўлчовли тўғри ва тескари масалалар, эластик-қовушқоқлик тенгламасидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда функционал анализ ва дифференциал тенгламаларни ечиш усуллари, ҳамда математик физика усулларидан фойдаланилган. Тўғри ва тескари масалаларнинг бир қийматли ечилувчанлиги улар Вольтерра типидаги иккинчи тур чизиқли бўлмаган ёпиқ интеграл тенгламалар системаси билан алмаштирилиб, сўнгра уларга кетма-кет яқинлашиш усули, сиқилувчан акслантиришлар принципи қўлланилган. Ҳисоблаш экспериментларини ўтказиш учун дастурлаш технологияларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

асосий қисмида тўлқин оператори бўлган гиперболик типдаги интегро-дифференциал тенглама учун қўйилган бошланғич-чегаравий масаланинг бир қийматли ечилиши, ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

тўғри масала ечими $z = 0$ да берилган ҳолда Фурье алмаштириши ва моментлар усулларидан фойдаланиб, горизонтал ўзгарувчи x дан кучсиз боғлиқ бўлган интеграл ҳаднинг икки ўлчовли ядросини аниқлаш масаласининг глобал бир қийматли ечилувчанлиги исботланган;

фазовий ўзгарувчилари бўйича аналитик ва вақт ўзгарувчиси бўйича силлиқ функциялар синфида интеграл ҳаднинг икки ўлчовли ядросини топиш масаласининг локал бир қийматли ечилувчанлиги исботланган;

горизонтал қатламланган таъсирдан кейинги эластик-қовушқоқ муҳитнинг хотира функциясини аниқлашнинг сонли усули қурилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари математик физиканинг тескари масалалари билан шуғулланувчи мутахассисларнинг илмий тадқиқотларида гиперболик типдаги интегро-дифференциал тенгламалар ва уларнинг системаларида бир ва кўп ўлчовли ядрони аниқлаш масалаларида, горизонтал қатламланган муҳитнинг хотира функцияси параметрларини сонли аниқлашда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги дифференциал тенгламалар назарияси, тескари масалалар назарияси, математик анализ усуллари қўлланилганлиги, ҳамда, исботлар ва математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги, масаланинг аниқ ечими билан таққосланиши ва ҳисоблаш экспериментини ўтказиш билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти, улар математик физиканинг интегро-дифференциал тенгламалари учун тескари масалалар назариясини янада ривожлантириши, хотира функцияси параметрларини аниқлашнинг сонли усули қурилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти уларни геофизик ва сейсмик кузатишлар моделларида, хотирали муҳитда эластик ва электромагнит тўлқинларнинг тарқалишини текширишда татбиқ этилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Гиперболик типдаги интегро-дифференциал тенгламалар учун кучсиз горизонтал муҳитларда тескари масалаларга оид илмий натижалар асосида:

горизонтал ўзгарувчидан кучсиз боғлиқ бўлган иккинчи тартибли гиперболик типдаги интегро-дифференциал тенгламаларда икки ўлчовли ядрони топишнинг таклиф этилган усулидан ОТ-Атех-2018-340 рақамли «Икки тезликли муҳит динамикасининг амалий геофизик масалаларини назарий ва сонли тадқиқ этиш» мавзусидаги лойиҳада (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 8 июлдаги №89-03-2472 рақамли маълумотномаси) эластик–қовушқоқлик тенгламасидан ядрони аниқлаш масалаларида фойдаланилган. Илмий натижаларнинг қўлланилиши кучсиз горизонтал муҳитларда хотирали тенглама ядросини аниқлаш масаласининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш имкониятини берган;

горизонтал қатламланган соҳаларда хотира функцияси параметрларини сонли аниқлаш усулларидан РНФ 18-19-00538 рақамли «Микро ва наноқопламали сиртлардаги суюқлик томчиларининг динамикаси ва буғланиши» номли хорижий лойиҳада (Россия фанлар академияси, Сибир бўлими, С.Л. Соболев номидаги Математика институти, 2020 йил 7 июлдаги маълумотномаси) ўрама типидаги гиперболик интегро-дифференциал тенгламанинг ядросини аниқлашда фойдаланилган. Илмий натижаларнинг қўлланилиши қатламли қопламаларнинг хотира функциясини аниқлашнинг сонли усулини қуриш имкониятини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари 3 та халқаро ва 4 та республика илмий–амалий анжуманларида, жами 7 та илмий–амалий анжуманларда муҳокамадан ўтган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 13 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестацияси комиссиясининг фалсафа доктори диссертацияларини ҳимоя қилишда тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 118 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертацияда танланган мавзунинг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги ёритилган, мавзу бўйича хорижий ва маҳаллий илмий–тадқиқот ишлари шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган мақолалар ва диссертация структураси бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи боби **«Кучсиз горизонтал муҳитларда хотира ядросини аниқлаш масаласи»** деб аталади**.** Ушбу бобда иккинчи тартибли гиперболик типдаги интегро-дифференциал тенгламанинг интеграл ҳадидаги ядрони топиш тескари масаласи ўрганилган. Бунда ядро ҳам вақтдан боғлиқ, ҳам фазовий ўзгарувчиларнинг биридан боғлиқ. Ядро x ўзгарувчидан кучсиз боғлиқ деб фараз қиламиз. Биринчи бобнинг биринчи параграфида тўғри ва тескари масала моментлар усулида ечилган. Қуйидаги интегро-дифференциал тўлқин тенгламасини

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{zz}=\int_0^t K\,(\tau,x)u(t-\tau,x,z)d\tau,\;\; t\in\mathbb{R},\;\; (x,z)\in\mathbb{R}_+^2 \qquad (1)$$

бошланғич ва чегаравий шартлар

$$u|_{t<0}\equiv 0, \qquad (2)$$
$$u_z|_{z=0}=\delta(x)\delta'(t) \qquad (3)$$

билан қараймиз. Бу ерда $\mathbb{R}_+^2=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2|z>0\}$, $\delta(x)-$ Диракнинг дельта-функцияси, $\delta'(t)$- эса унинг ҳосиласи.

Тескари масалани қуйидагича қўямиз: агар (1)-(3) масаланинг $z=0$ даги

$$u(t,x,0)=f(t,x),\;\; t>0,\;\; x\in\mathbb{R}, \qquad (4)$$

қиймати маълум бўлса, (1) тенгламадаги интеграл ҳаднинг $K(x,t)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$ ядроси аниқлансин. Фараз қилайлик, (1) тенгламадаги интеграл ҳад ядроси K горизонтал ўзгарувчиси x дан кучсиз боғлиқ бўлсин:

$$K(t,x)=K_0(t)+\varepsilon xK_1(t)+\cdots, \qquad (5)$$

бу ерда ε- кичик параметр.

(1)-(3) тўғри масала ечимини ε нинг даражалари бўйича қатор кўринишида излаймиз:

$$u(t,x,z)=u_0(t,x,z)+\varepsilon u_1(t,x,z)+\cdots. \qquad (6)$$

У ҳолда (4) тенгликни инобатга олсак, $f(t,x)$ қуйидаги кўринишда бўлади:

$$f(t,x)=f_0(t,x)+\varepsilon f_1(t,x)+\cdots.$$

v_{nm} орқали u_n функциянинг $m-$ моментини белгилаймиз:

$$v_{nm}(t,z):=\int_{-\infty}^{\infty}u_n\,(t,x,z)x^m dx.$$

Қуйидаги

$$v_{nn|_{z=0}} = \int_{-\infty}^{\infty} f_n\,(t,x)x^n dx = a_n(t),\ \ n = 0{,}1, \tag{7}$$

тенгликлар ўринли бўлиб, $a_n(t), n = 0{,}1 -$ эса берилган етарлича силлиқ функциялар бўлсин. $n = m = 0$ да K_0, v_{00} номаълум функциялар учун қуйидаги масалага эга бўламиз:

$$v_{00tt} = v_{00zz} + \int_0^t K_0\,(\tau)v_{00}(t-\tau, z)d\tau, \tag{8}$$

$$v_{00}|_{t<0} \equiv 0,\ \ v_{00z}|_{z=0} = \delta'(t). \tag{9}$$

(8), (9) масала ечимини қуйидаги кўринишда қидирамиз:

$$v_{00}(t,z) = -\delta(t-z) + v(t,z)\theta(t-z),$$

бу ерда $v(z,t) -$ регуляр функция. Юқоридагидан келиб чиқадики, тескари масала ечимга эга бўлиши учун $a_0(t)$ функция

$$a_0(t) = -\delta(t) + \theta(t)a(t),\ \ t \in \mathbb{R}$$

кўринишда бўлиши зарур, бунда $a(t) -$ маълум регуляр функция. (7) қўшимча шарт $n = 0$ да v_{00} функциянинг регуляр қисми бўлган v функция учун қуйидаги кўринишда бўлади:

$$v(t,0) = a(t), \qquad t > 0. \tag{10}$$

1-теорема. $a(t) \in C^3[0,T]$ бўлиб $a(0) = a'(0) = 0$ тенгликлар ўринли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий тайин $T > 0$ сони учун (8)-(10) тескари масала $K_0(t) \in C^1[0,T]$ ягона ечимга эга.

Энди K_1, v_{11} функцияларни аниқлаймиз. (7) қўшимча шартни $n = 1$ да ва тўғри масалани $n = m = 1$ ларда ҳисобласак, $v_{11}(t,z), K_1(t)$ функцияларни топиш учун қуйидаги тенгламаларга эга бўламиз:

$$v_{11tt}{=}v_{11zz}{+}\int_0^t [K_0(t-\tau)v_{11}(\tau,z){+}K_1(t-\tau)v_{02}(\tau,z)]\,d\tau,\ \ (t,z){\in}\mathbb{R}_+^2, \tag{11}$$

$$v_{11}|_{t<0} \equiv 0,\ \ \frac{\partial}{\partial z}v_{11}\bigg|_{z=0} = 0,\ \ v_{11}|_{z=0} = a_1(t),\ \ z > 0. \tag{12}$$

2-теорема. $a_1(t) \in C^4[0,T]$ ва $a_1(0) = a_1'(0) = a_1''(0) = a_1'''(0) = 0$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий тайин $T > 0$ сони учун (11), (12) тескари масала $K_1(t) \in C[0,T], v_{11}(z,t) \in C(\square(0,T))$ ягона ечимга эга бўлади, бу ерда

$$\square(z,t) = \left\{(\xi,\tau): |\xi| \le \tau \le t - |z-\xi|,\ \ \frac{z-t}{2} \le \xi \le \frac{z+t}{2}\right\}.$$

Биринчи бобнинг иккинчи параграфида олдинги параграфдаги масала Фурье алмаштиришлари усулида ечилган. Бунда (1) ва (2) тенгламалар

$$u_z|_{z=0} = \delta'(x)\delta'(t)$$

чегаравий шарт ва $u(t,x,0) = g(t,x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}$ қўшимча шарт билан қаралган. u функцияни (6) кўринишда излаймиз ва K функцияни (5) кўринишда бўлсин деб фараз қиламиз. $u_j(t,x,z),\ \ j = 1{,}2, \ldots$ функциялардан x ўзгарувчи бўйича уларнинг экспоненциал Фурье образларига ўтамиз:

$$\tilde{u}_j(t,\lambda,z) = \int_{\mathbb{R}} u_j\,(t,x,z)e^{-i\lambda x}dx,\ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\tilde{u}_j$ номаълум функцияга нисбатан тескари масала қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\tilde{u}_{ntt} - \tilde{u}_{nzz} - \lambda^2 \tilde{u}_n = \int_0^t \sum_{j=0}^{n} i^j K_j(\tau) \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} \tilde{u}_{n-j}(t-\tau, \lambda, z) d\tau, \tag{13}$$

$$\tilde{u}_n|_{t<0} \equiv 0, \;\; \tilde{u}_{nz}|_{z=0} = -i\lambda\delta'(t)\delta_{n0}, \tag{14}$$

$$\tilde{u}_n|_{z=0} = \tilde{g}_n(t,\lambda), \;\; (t,\lambda) \in \mathbb{R}^2, \;\; n = 0,1,2,..., \tag{15}$$

бу ерда $t \in \mathbb{R}$, $(\lambda, z) \in \mathbb{R}_+^2$ бўлиб, δ_{n0} - Кронекер символи ва

$$\tilde{g}_m(t,\lambda) = \int_{\mathbb{R}} g_m(t,x) e^{-i\lambda x} dx, \;\; m = 0,1,2,...$$

Бу ердан $n = 0$ да K_0, $\tilde{u}_0$ ларга нисбатан ва $n = 1$ да K_1, $\tilde{u}_1$ларга нисбатан тескари масалага эга бўламиз. Гиперболик тенгламалар назариясидан маълумки $0 < t < z, z > 0$ бўлганда $\tilde{u}_0(t,\lambda,z) = 0$ бўлади. Шунинг учун $\tilde{u}_0$ ни

$$\tilde{u}_0(t,\lambda,z) = i\lambda\delta(t-z) + v(t,\lambda,z)\theta(t-z) \tag{16}$$

кўринишда ифодалаш қулай, бу ерда $v(t,\lambda,z)$ – регуляр функция. (16) тенгликни ҳисобга олсак, тескари масала ечимга эга бўлиши учун $\tilde{g}_0(t,\lambda)$ функция

$$\tilde{g}_0(t,\lambda) = i\lambda\delta(t) + r(t,\lambda)\theta(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

кўринишда бўлиши зарур, бу ерда $r(t,\lambda)$ функция t аргумент бўйича маълум силлиқлик шартларини қаноатлантиради. Юқоридаги тенгликни инобатга олган ҳолда v функция учун қўшимча шарт

$$v|_{z=0} = r(t,\lambda), \quad t > 0$$

каби бўлади.

3-теорема. $r(t,\lambda) \in C^2[0,T]$(силлиқлик t бўйича) бўлиб, $r(0,\lambda) = 0$, $r'(0,\lambda) = -\frac{1}{4}i\lambda^3$ ўринли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий тайин $T > 0$ лар учун (13)-(15) ($n = 0$ да) тескари масала ягона $K_0(t) \in C[0,T]$ ечимга эга бўлади.

4-теорема. Ихтиёрий тайин λ лар учун $\tilde{g}_1(0,\lambda) = 0, \tilde{g}_{1t}(0,\lambda) = 0$ тенгликлар ўринли бўлиб, $\tilde{g}_1(t,\lambda) \in C^2[0,T]$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий тайин $T > 0$ лар учун (13)-(15) ($n = 1$ да) масала $C[0,T]$ узлуксиз функциялар синфига тегишли ягона K_1 ечимга эга.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида икки ўлчовли эластик-қовушқоқлик интегро-дифференциал тенгламаси учун бошланғич-чегаравий масала

$$u_{tt} - \Delta u = \int_0^t K(\tau,x) \Delta u(t-\tau,x,z) d\tau, \;\; t \in R, \;\; (x,z) \in \mathbb{R}_+^2, \tag{17}$$

бошланғич

$$u|_{t<0} \equiv 0 \tag{18}$$

ва чегаравий

$$\left[u_z + \int_0^t K(\tau,x) u_z(t-\tau,x) d\tau\right]_{z=0} = \delta(x)\delta'(t) \tag{19}$$

шартлар билан қаралган бўлиб, бу ерда $\mathbb{R}_+^2 = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 | z > 0\}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Тескари масалани қуйидагича қўямиз: (17)-(19) тўғри масала ечимининг $z = 0$ даги

$$u(t,x,0) = b(t,x), \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

қийматидан фойдаланиб, (17) тенглама интеграл ҳадининг $K(t,x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ ядроси топилсин.

(17) тенглама иккала томонини x^m га кўпайтириб, x ўзгарувчи бўйича минус чексиздан плюс чексизгача интеграллаб, (8) ва (9) тенгламаларни ҳисобга олиб

$$v_{n,mtt} - v_{n,mzz} = m(m-1)v_{n,m-2} +$$
$$+\int_0^t \sum_{j=0}^n K_j(\tau)[(m+j)(m+j-1)v_{n-j,m+j-2}(t-\tau,z) +$$
$$+v_{(n-j,m+j)zz}(t-\tau,z)]d\tau, \;\; (t,z) \in \mathbb{R}_+^2. \tag{20}$$

$$v_{n,m}|_{t<0} \equiv 0,$$
$$\left[v_{n,mz} + \int_0^t \sum_{j=0}^n K_j(\tau) v_{(n-j,m+j)z}(t-\tau,z)d\tau\right]_{z=0} = \delta_{n0}\delta_{m0}\delta'(t) \tag{21}$$

$$v_{n,n|_{z=0}} = \int_{-\infty}^{\infty} b_n(t,x)x^n dx = q_n(t), \;\; n = 0,1 \tag{22}$$

тенгламаларга эга бўламиз. Бу тенгликларни $n = m = 0$ да ҳисоблаймиз. У ҳолда (20), (22) тенгликлардан K_0 ва v_{00} ларни топиш учун

$$v_{00tt} - v_{00zz} = \int_0^t K_0(\tau)v_{00zz}(t-\tau,z)d\tau, z > 0, \;\; t \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

$$v_{00}|_{t<0} \equiv 0, \;\; \left[v_{00z} + \int_0^t K_0(\tau)v_{00z}(t-\tau,z)d\tau\right]_{z=0} = \delta'(t), \tag{24}$$

$$v_{00}|_{z=0} = q_0(t) \tag{25}$$

масалага эга бўламиз.

Янги $\tilde{v}(z,t)$ функцияни қуйидагича киритамиз:

$$\tilde{v}(z,t) = v_{00}(z,t) + \int_0^t K_0(t-\tau)v_{00}(\tau,z)d\tau.$$

$t = z$ характеристика атрофида $\tilde{v}(z,t)$ функция учун $\tilde{v}(t,z) = -\delta(t-z) + v(t,z)\theta(t-z)$ тенглик ўринли. Тескари масала ечимга эга бўлиши учун $q_0(t)$ функция $q_0(t) = -\delta(t) + \theta(t)q_{00}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ кўринишида бўлиши зарур ҳисобланади.

5-теорема. $T > 0$ – тайин сон бўлиб, $q_0(t)$ функция $q_0(t) = -\delta(t) + \theta(t)q_{00}(t)$ кўринишда, $q_{00} \in C^2[0,T]$ ва $q_{00}(0) = q'_{00}(0) = 0$ тенгликлар ўринли бўлсин. У ҳолда (23)-(25) масала ягона ечимга эга бўлиб, $K_0(t) \in C^2[0,T]$, $(v(t,z), v_t(t,z)) \in C(D_T)$ бўлади, бу ерда $D_T = \{(z,t) | \; 0 \le z \le t \le T - z\}$.

(20), (21) ($n = m = 1$ да) ва (22) ($n = 1$ да) тенгламалардан K_1, v_{11} функцияларни топиш масаласини қараймиз. Бу масала учун қуйидаги теорема ўринли:

6-теорема. $q_1(t) \in C^2[0,T]$ бўлиб, $q_1(0) = q'_1(0) = 0$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий тайин $\mathrm{T} > 0$ учун (20)-(22) масала ($n = m = 1$ да) ягона $K_1(t) \in C[0,T]$, $v_{11}(t,z) \in C(\square(0,T))$ ечимга эга бўлади.

Диссертациянинг иккинчи боби **«Икки ўлчамли эластик-қовушқоқлик тенгламаси ядросини аниқлаш»** деб номланиб, эластик-қовушқоқлик интегро-дифференциал тенгламаси қаралган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида тўғри ва тескари масаланинг қўйилиши келтирилган. Қуйидаги интегро–дифференциал тенгламани

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} L\left[k(x,t), \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial x} L\left[k(x,t), \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right], \tag{26}$$

$(x,t) \in \mathbb{R}^2, y > 0$ лар учун қараймиз, бу ерда $L[k(x,t), u(x,y,t)]$ – бичизиқли оператор бўлиб, қуйидаги кўринишга эга:

$$L[k(x,t), u(x,y,t)] = u(x,y,t) + \int_0^t k\,(x, t-\tau) u(x,y,\tau) d\tau.$$

Фараз қилайлик, (26) тенглама ечими қуйидаги бошланғич ва чегаравий

$$u|_{t<0} \equiv 0, \qquad L\left[k(x,t), \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right]_{y=0} = -\frac{\delta'(t)}{2} \tag{27}$$

шартларни қаноатлантирсин.

Тескари масала: (26), (27) тўғри масала ечими ҳақидаги

$$u(x,y,t)|_{y=0} = g(x,t), \;\; t > 0$$

қўшимча маълумотдан фойдаланиб, (26) тенгламага кирувчи $k(x,t), t > 0$ ядро аниқлансин. Бу ерда $g(x,t)$ – берилган функция. Берилган масалани $D_T = G_T \times R, G_T = \{(y,t)|\; 0 \le y \le t \le T - y\},\;\; T > 0$ соҳада қараймиз.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида тўғри ва тескари масалалар номаълум функциялар ва уларнинг баъзи ҳосилаларига нисбатан ёзилган эквивалент ёпиқ интегро-дифференциал тенгламалар системасига алмаштирилади. A_s, $s > 0$ орқали $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ҳақиқий ўзгарувчили, координата бошида аналитик функцияларнинг банах фазосини киритамиз ва улар учун

$$\|\varphi\|_s := \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{s^\alpha}{\alpha!} \left|\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \varphi(0)\right| < \infty$$

тенглик ўринли бўлсин. Бу ерда $s > 0$ – шкала параметри.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида олдинги параграфда олинган системага аналитик функциялар банах фазоси шкаласи методи қўлланилади. x ўзгарувчи бўйича аналитик, t ўзгарувчи бўйича силлиқ бўлган функциялар синфида тескари масаланинг локал бир қийматли ягона ечими мавжудлиги ҳақидаги теорема исботланган:

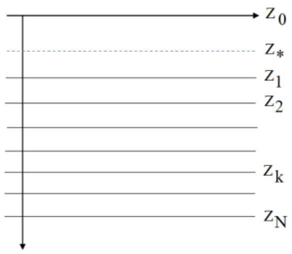
7-теорема. $g(x,t)=\frac{\delta(t)}{2}+\tilde{g}(x,t)\theta(t),\ \tilde{g}(x,0)=\tilde{g}_t(x,0)=0$ ва $(\tilde{g}(x,t),\tilde{g}_t(x,t),\tilde{g}_{tt}(x,t))\in C_t\big(A_{s_0};\ [0,T]\big)$ ўринли бўлсин. У ҳолда шундай $b\in(0,T/2)$ сони топиладики, ихтиёрий $s\in(0,s_0)$ лар учун тескари масаланинг ягона

$$k(x,t)\in C_t^2\big(\ A_{s_0};[0,b(s_0-s)]\big)$$

ечими мавжуд.

Диссертациянинг учинчи боби **«Таъсирдан кейинги горизонтал қатламли эластик муҳитнинг хотира функциясини сонли аниқлаш»** деб номланган. Ушбу бобнинг биринчи параграфида асосий масаланинг қўйилиши келтирилган. Бўлиниш чегаралари $z_k,\ k=\overline{0,N},z_0=0$ лардан иборат бўлган n-қатламли муҳитни қараймиз, бунда m-қатлам $[z_{m-1},z_m]$ интервалда жойлашган, $N+1$ эса $[z_N,\infty)$ да жойлашган (1-расм). Ҳар бир қатламнинг физик хусусиятлари ўзининг бўйлама тўлқинлари, зичликлари бўлиб, улар муҳитнинг хотираси учун жавоб беради, яъни бу функциялар z $(0<z<\infty)$ ўзгарувчи бўйича бўлакли-ўзгармас.

Муҳитнинг тебраниши $f(t)\nabla\delta(x,y,z-z_*)$-портловчи манба ёрдамида амалга оширилган деб ҳисоблаймиз, бунда z_* - манба жойлаштирилган чуқурлик.



1-расм. Муҳит модели.

Цилиндрик координата системасида хотирали бир жинсли муҳит тебранишини тавсифловчи Ламе ситемасини қараймиз. Бунда Ламе коэффициентлари ва хотира функцияси r горизонтал ўзгарувчидан боғлиқ эмас ва горизонтал-қатламли муҳитнинг ҳар бир қатламида бу коэффициентларни ўзгармас деб фараз қиламиз. Сўнг бу системага Фурье-Бессел алмаштиришини қўллаб, ν параметрни 0 га тенг десак қуйидаги

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho V_p\frac{\partial u}{\partial z}\right)-f(t)\delta'(z-z_*) \tag{28}$$

тенгламага эга бўламиз, бу ерда V_p – оператор бўлиб, қуйидагича аниқланган:

$$V_p u(t,z)=v_p^2u(t,z)-\int_0^t h\,(t-\tau,z)u(\tau)d\tau,\ \ v_p=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}.$$

Вақтнинг дастлабки моментида муҳит тинч турган деб ҳисоблаймиз:

$$u_z|_{t<0}\equiv 0. \tag{29}$$

Устки соҳада таъсирнинг йўқлиги қуйидаги чегаравий шарт билан берилади:

$$\left.\left(\rho V_p\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right|_{z=0}=0. \tag{30}$$

Муҳитнинг z_k узилиш нуқталарида таъсир ва кўчиш майдонлари узлуксиз бўлсин:

$$\left[\rho V_p \frac{\partial u_z}{\partial z}\right]_{z_k} = 0, \quad [u_z]_{z_k} = 0. \tag{31}$$

Муҳитнинг ρ зичлигини ва муҳитдаги бўйлама тўлқинлар тезлиги v_p ни маълум деб ҳисоблаймиз. Хотира функцияси бўлган $h(t,z)$ ни топиш талаб қилинади.

Шу билан бирга (28)-(31) тўғри масала ечими ҳақида қуйидаги

$$u_z(t,0) = u_0(t), \tag{32}$$

қўшимча шарт берилган бўлсин. Бизга маълумки, кўпгина ҳолларда хотира функцияси

$$h(t,z) = \gamma \mathrm{e}^{-\alpha t}$$

кўринишда бўлади. Шунинг учун хотира функциясини шу кўринишда излаймиз. Шуни таъкидлаш керакки, γ ва α параметрлар ҳар бир қатламда турлича қиймат қабул қилишади, яъни улар бўлакли-ўзгармас.

Частотали муҳитда тўғри масалани қараш учун вақт ўзгарувчиси бўйича Лаплас алмаштиришини бажарамиз ва қуйидаги тенгликни оламиз

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho w_p \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \rho p^2 v = F(p)\delta'(z - z_*), \tag{33}$$

бу ерда $v(z,p)$, $F(p)$ лар мос равишда $u_z(t,z)$ ва $f(t)$ функцияларининг Лаплас образларидир, $w_p = v_p^2 + \frac{\gamma}{p+\alpha}$. Чегаравий шартлар ва келишувчанлик шартлари

$$\left(\rho w_p \frac{\partial v}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = 0, \qquad \left[\rho w_p \frac{\partial v}{\partial z}\right]_{z_k} = 0, \qquad [v]_{z_k} = 0 \tag{34}$$

кўринишда бўлади. Берилган шартларга чексизликда сўниш шартини қўшамиз

$$v \to 0 \;\; (z \to \infty). \tag{35}$$

(32) қўшимча шартни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$v(0,p) = v_0(p). \tag{36}$$

Манба функцияси δ функция ёрдамида берилгани учун, (33)-(36) тескари масала қуйидаги масалага эквивалент:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho w_p \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \rho p^2 v = 0, \tag{37}$$

$$\left(\rho w_p \frac{\partial v}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = 0, \quad v \to 0 \;\; (z \to \infty), \tag{38}$$

$$\left[\rho w_p \frac{\partial v}{\partial z}\right]_{z_k} = 0, \quad [v]_{z_k} = 0, \tag{39}$$

$$\left[\rho w_p \frac{\partial v}{\partial z}\right]_{z_*} = 0, \quad [v]_{z_*} = \frac{F(p)}{\rho w_p}, \tag{40}$$

$$v(0,p) = v_0(p). \tag{41}$$

γ ва α бўлакли-ўзгармас функцияларни аниқлаш бўйича (37)-(41) тескари масала, қуйидаги қолдиқ функционалини минимизациялаш орқали ечилади:

$$J[\gamma,\alpha]=\sum_{k=1}^{N_\omega}|\,v(0,p)-v_0(p)|^2,\quad p=\beta+i\omega_k, \tag{42}$$

N_ω – бирор интервалдаги частоталар сони, ω_k –шу чегараланган интервалга тегишли.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида қолдиқ функционалини ҳисоблаш учун қатлам буйича ҳисоблаш методидан фойдаланилган. (42) қолдиқ функционалини ҳисоблаш учун (37)-(40) тўғри масалани тез ечишни билишимиз керак, бошқача айтганда $v(0)$ нинг қийматини топишимиз керак. Бунинг учун

$$\rho w_p\frac{\partial v}{\partial z}=sv \tag{43}$$

тенгламани қаноатлантирувчи $s(z)$ функцияни қараймиз, бу ерда v функция (37) тенгламанинг ечими. s функция қуйидаги Риккати тенгламасини қаноатлантиради:

$$s'+\frac{s^2}{\rho w_p}=\rho p^2.$$

s функция учун келешувчанлик шарти $[s]_{z_k}=0$ каби бўлади. Ҳар бир қатламда Риккати тенгламасининг ечими

$$s(z)=(\rho w_p r)_k\frac{(s^k/(\rho w_p)_k+r_k)e^{2r_k(z-z_k)}+(s^k/(\rho w_p)_k-r_k)}{(s^k/(\rho w_p)_k+r_k)e^{2r_k(z-z_k)}-(s^k/(\rho w_p)_k-r_k)}$$

каби бўлиб, бу ерда $r=\sqrt{p^2/w_p}$, $\mathrm{Re}\{r\}>0$. Келишувчанлик шартидан $s(z_k+0)=s(z_k-0)\equiv s^k$ тенгликни оламиз. (38) ва (43) дан $s(0)=0$ эканлиги келиб чиқади, бундан эса Риккати тенгламаси $[0,z_*]$ кесмада

$$s(z)=(\rho w_p r)_1\frac{1-e^{-2r_1 z}}{1+e^{-2r_1 z}}$$

ечимга эга эканлиги келиб чиқади. (40) ва (43) тенгликларни ҳисобга олиб

$$s(z_*+0)v(z_*+0)-s(z_*-0)v(z_*-0)=0,$$

$$v(z_*+0)-v(z_*-0)=\frac{F(p)}{(\rho w_p)_1},$$

$$v(z_*-0)=\frac{F(p)}{(\rho w_p)_1}\frac{s(z_*+0)}{s(z_*+0)-s(z_*-0)}$$

тенгликларни топамиз. Охирги ифода $[0,z_*]$ кесмада (43) дифференциал тенглама учун бошланғич шарт вазифасини бажаради. $[0,z_*]$ кесмада $s(z)$ функция бизда бор, у ҳолда (43) нинг ечими

$$v(z)=e^{r_1(z-z_*)}\frac{1+e^{-2r_1 z}}{1+e^{-2r_1 z_*}}v(z_*-0)$$

каби бўлади. Кейин $v(0)$ ни ҳисоблаймиз:

$$v(0)=\frac{2\,e^{-r_1 z_*}}{1+e^{-2r_1 z_*}}v(z_*-0).$$

Учинчи бобнинг учинчи параграфида қолдиқ функционалини минимизация қилиш учун қўшма градиентлар усулидан фойдаланилган ва қолдиқ функционали градиенти ҳисобланган.

Муҳитнинг қатламланганлидан, γ ва α лар бўлакли-ўзгармас функциялар бўлади ва m – қатлам хотираси γ_m ва α_m лар орқали ифодаланади, у ҳолда $J[\gamma,\alpha]$ (42) қолдиқ функционалини $2N$ аргументли функция сифатида қараш мумкин: $J[\ldots,\gamma_m,\ldots,\ldots,\alpha_m,\ldots]$. Унинг градиенти эса – қуйидаги вектор:

$$\nabla J[\ldots,\gamma_m,\ldots,\ldots,\alpha_m,\ldots]=\left(\ldots,\frac{\partial J}{\partial\gamma_m},\ldots,\ldots,\frac{\partial J}{\partial\alpha_m},\ldots\right)^T. \qquad (44)$$

(44) нинг хусусий ҳосилалари учун

$$\frac{\partial J}{\partial\gamma_m}=\begin{cases}0, & \text{агар}\ \begin{matrix}J(\ldots,\gamma_m,\ldots)\le J(\ldots,\gamma_m+h_\gamma,\ldots),\\ J(\ldots,\gamma_m,\ldots)\le J(\ldots,\gamma_m-h_\gamma,\ldots),\end{matrix}\\ \dfrac{J(\ldots,\gamma_m+h_\gamma,\ldots)-J(\ldots,\gamma_m-h_\gamma,\ldots)}{2h_\gamma}, & \text{акс ҳолда,}\end{cases}$$

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha_m}=\begin{cases}0, & \text{агар}\ \begin{matrix}J(\ldots,\alpha_m,\ldots)\le J(\ldots,\alpha_m+h_\alpha,\ldots),\\ J(\ldots,\alpha_m,\ldots)\le J(\ldots,\alpha_m-h_\alpha,\ldots),\end{matrix}\\ \dfrac{J(\ldots,\alpha_m+h_\alpha,\ldots)-J(\ldots,\alpha_m-h_\alpha,\ldots)}{2h_\alpha}, & \text{акс ҳолда}\end{cases}$$

ифодалардан фойдаланиш мумкин. h_γ ёки h_α орттирмалар тескари масалани ечаётганда симуляция қилинган аниқ маълумотларга таяниб танланилади. Қолдиқ функционали минимумини қидиришда, итерациялар сони энг кам бўладиган шартдан келиб чиқиб орттирмаларнинг оптимал қиймати олинади.

Манба функциясининг вақтга боғлиқ ўзгариши қуйидагича бўлсин:

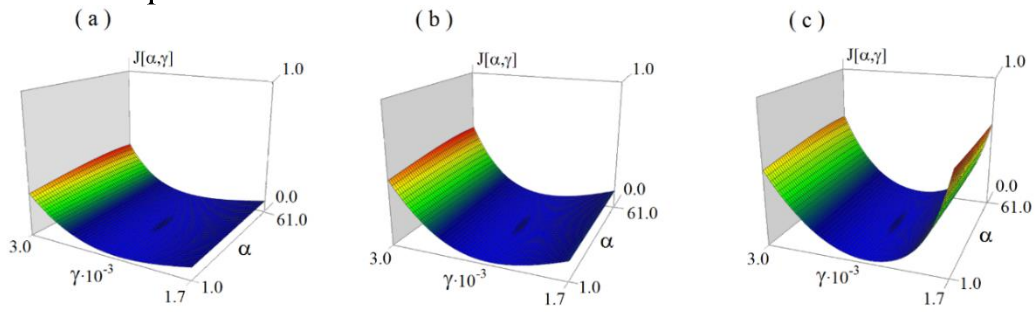
$$F(t)=A_0\mathrm{e}^{-a_0 t}\cos\left(\omega_0 t\right).$$

бу ерда A_0 – манбанинг амплитудаси, a_0 параметр сўниш тезлигини аниқлайди, $\omega_0=2\pi f_0$ частота эса ташувчи. Сонли тажрибаларда қуйидаги қийматлардан фойдаланамиз: $A_0=10^9$, $a_0=10^2$, $\omega_0=2\pi f_0$, $f_0=30$ Гц.

Қуйида реал муҳитнинг моделини қараймиз:

	z_k, м	$\rho\cdot 10^{-3}$, кг/м^3	$v_p\cdot 10^{-3}$, м/с	$\gamma\cdot 10^{-3}$, м^2/с^3	α, 1/с
1-қатлам	100	1.0	0.30	0.00	0.0
2-қатлам	800	1.3	0.70	0.00	0.0
3-қатлам	1500	1.5	1.00	0.00	0.0
4-қатлам	1510	2.0	1.30	2.10	30.0
5-қатлам	1525	2.1	1.33	2.12	50.0
6-қатлам	1540	2.0	1.31	2.19	30.0
7-қатлам	1570	2.2	1.34	2.14	34.0
8-қатлам	1600	2.3	1.33	2.53	50.0
9-қатлам	1700	2.4	1.50	0.00	0.0
10-қатлам	2000	2.4	1.70	0.00	0.0
11-қатлам		2.5	2.00	0.00	0.0

Қолдиқ функционали параметрлари ўзгаришида, қолдиқ функционали қандай ўзгаришини кўрамиз. 2-расм γ_1 ва α_1 етарлича катта оралиқда ўзгариб, бошқа катталиклар ўзгармас бўлганда олинган. $\{\gamma_k, \alpha_k\}$ нинг бошқа жуфтликлари ўзгариши шунга ўхшаш натижага олиб келади. 2-расмда частотанинг турли интерваллари танланганда, қолдиқ функционали қандай ўзгариши келтирилган.



2-расм. Частотанинг турли интерваллари танланганда, қолдиқ функционали ўзгариши, a) $\boldsymbol{f_0} \in [\mathbf{5}; \mathbf{25}]$ Гц, b) $\boldsymbol{f_0} \in [\mathbf{5}; \mathbf{50}]$ Гц, c) $\boldsymbol{f_0} \in [\mathbf{5}; \mathbf{75}]$ Гц.

Буларга қараб шуни айтиш мумкинки, қолдиқ функционали энг катта ўзгариши частота $[5; 75]$ Гц интервалдан танланганда бўлар экан.

Учинчи бобнинг тўртинчи параграфида тескари масала сонли ечилган. (42) қолдиқ функционалини минимизация қилишда қўшма градиентлар методидан фойдаланилган. Бунда минимизация қилиш кетма-кетлиги қуйидагича:

$$G^{k+1} = G^k - \theta_k P_k, \quad G = \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \end{bmatrix},$$

k – итерация номери, G^0 – қидирилаётган функцияларга дастлабки яқинлашиш, P_k – қўшма йўналиш ва

$$P_0 = J'[G^0], \;\; P_k = J'[G^k] + \beta_k P_{k-1}, \;\; \beta_k = \frac{\| J'[G^k] \|^2}{\| J'[G^{k-1}] \|^2}, \;\; k = 1,2,\ldots,$$

θ_k параметр–усулнинг қадами бўлиб,

$$\theta_k = \arg\min_{\theta} J\,[G^k - \theta P_k]$$

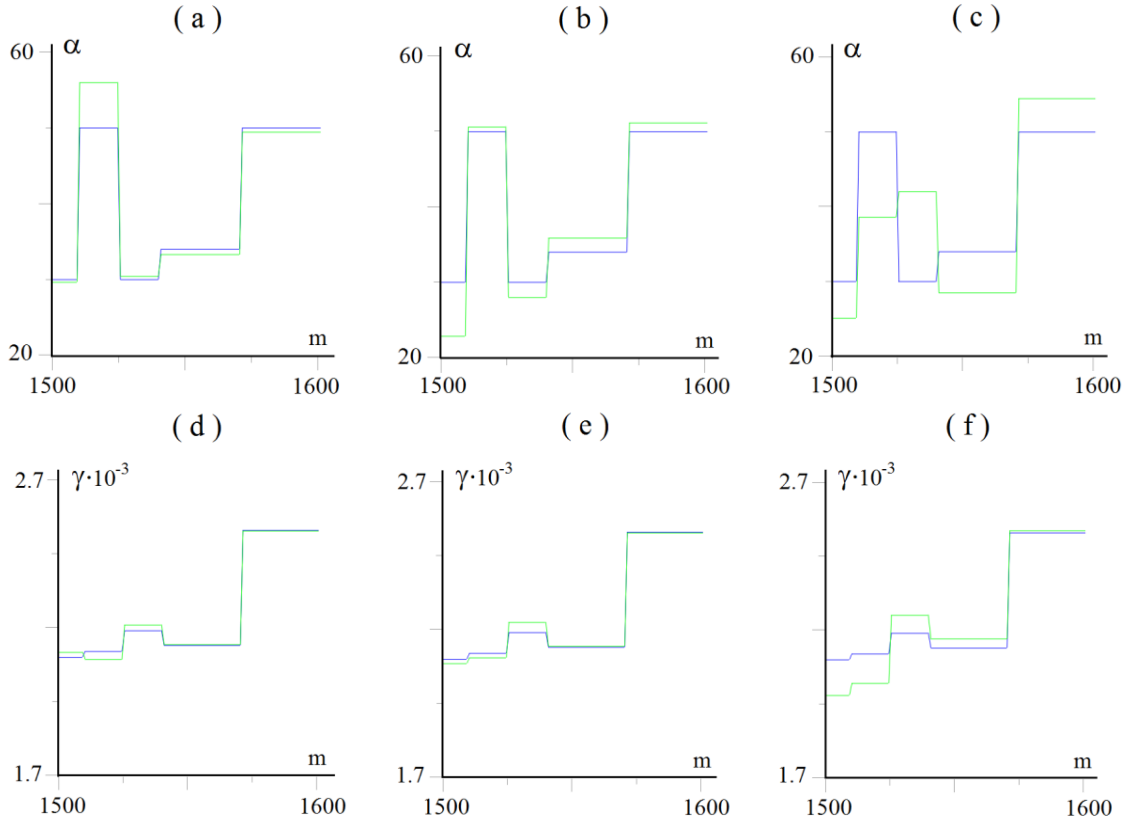
бир ўзгарувчили минимизация функцияси ечими. Таклиф қилинаётган алгоритм симуляция қилинган маълумотлар ёрдамида текширилади, яъни мос келувчи тўғри масала ёрдамида керакли катталиклар аниқланади, сўнг қўшимча маълумот функциясига қуйидаги кўринишдаги тасодифий хатолик қўшилади:

$$\tilde{v}_0 = v_0 \left(1 + \frac{Pr}{100} \xi\right),$$

бу ерда Pr – хатоликнинг фоизларда ифодаланиши, ξ – бирлик доирада текис тақсимланган тасодифий комплекс катталик. Тескари масалани сонли ечишда қуйидаги параметрлар танланилган:

- қолдиқ функционалини қуриш учун: $N_\omega = 200$ вақт частоталари сони бўлиб, $\beta = 10^{-2}$ қадам билан $[5; 80]$ Гц интервалдан олинган;
- қолдиқ функционали градиентини аниқлаш учун: $h_\gamma = 10^{-7}$ ва $h_\alpha = 10^{-7}$;
- қўшма градиентлар усули қадами - θ_k, 10^{-8} аниқлик билан ҳисобланилади.

Тескари масалада муҳитнинг хотира параметрлари бўлган γ_k ва α_k $(k=\overline{4,8})$ лар аниқланиб, улар юпқа қатламли қатламлар параметрларидир. Бошланғич яқинлашиш $\gamma_k = 10^3$ м^2/с^3 ва $\alpha_k = 10$ 1/с $(k=\overline{4,8})$. Сонли тажрибалар натижалари 3-расмда келтирилган.



3-расм. Параметрларнинг тикланиш натижалари a)-c) **α**, d)-f) **γ**; тескари масала берилганларига хатолик қўшиб параметрларни тиклаш a), d) 3%, b), e) 5% ва c), f) 10%. Аниқ қиймат кўк, тикланган қиймат яшил рангли чизиқлар.

Параметрларнинг тикланган қийматларини таҳлил қилиб шуни айтиш мумкинки, агар тескари масала берилганлари (40) га 3% хатолик берсак, γ_k параметр тиклаш максимал нисбий хатолиги 4%, α_k $(k=\overline{1,4})$ эса – 12%. Хатолик 5% бўлганда мос равишда — 6% ва 24%, хатолик 10% бўлганда— 10% ва 40% ташкил қилади.

ХУЛОСА

Ушбу диссертация кучсиз горизонтал муҳитларда гиперболик типдаги иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенгламанинг икки ўлчовли ядросини топиш тескари масаласини ўрганишга бағишланган.

Асосий тадқиқот натижалари қуйидагилардан иборат:

асосий қисмида тўлқин оператори бўлган гиперболик типдаги интегро-дифференциал тенглама учун қўйилган бошланғич-чегаравий масаланинг бир қийматли ечилиши, ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган

тўғри масала ечими $z=0$ да берилган ҳолда Фурье алмаштириши ва моментлар усулларидан фойдаланиб, горизонтал ўзгарувчи x дан кучсиз боғлиқ бўлган интеграл ҳаднинг икки ўлчовли ядросини аниқлаш масаласининг глобал бир қийматли ечилувчанлиги исботланган;

фазовий ўзгарувчилари бўйича аналитик ва вақт ўзгарувчиси бўйича силлиқ функциялар синфида интеграл ҳаднинг икки ўлчовли ядросини топиш масаласининг локал бир қийматли ечилувчанлиги исботланган;

горизонтал қатламланган таъсирдан кейинги эластик-қовушқоқ муҳитнинг хотира функциясини аниқлашнинг сонли усули қурилган, қолдиқ функционалини қуриш учун энг оптимал частоталар оралиғи танланган ва сонли моделлаштирилган, тескари масала ечимини ифодаловчи мисол қурилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

БОЗОРОВ ЗАВКИДДИН РАВШАНОВИЧ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В СЛАБО ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СРЕДАХ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Бухара-2020

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2020.2.PhD/FM459.

Диссертация выполнена в Бухарском отделении Института Математики имени В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекистан и Бухарском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный консультант:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Хасанов Акназар Бекдурдиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Карчевский Андрей Леонидович доктор физико-математических наук, профессор (Россия)
Ведущая организация:	**Национальный Университет Узбекистана**

Защита диссертации состоится «____» __________2020 года в «____» часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №___). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» ______________2020 года.
(протокол рассылки № ____ от «___» _______________2020 года).

А.С. Солеев
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

А.Б. Хасанов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Значительная часть научных и прикладных исследований, проводимых по всему миру, приводит к изучению прямых и обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, а также численным решениям этих задач. В настоящее время обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений с частными производными являются наиболее изучаемыми проблемами геологии, электродинамики, процессов распространения волн, геофизики и многих других областей. Основываясь на дополнительной информации о решении прямой задачи, определение решения прямой задачи и ядра интегро-дифференциального уравнения, а также численное исследование задач остаются одним из важных задач математической физики.

В настоящее время особое внимание уделяется теории и численным методам решения обратных задач, которые являются самой быстрорастущей областью математической физики в мировых научных исследованиях. Такие задачи стали одними наиболее важными в физике и технических науках, так как они позволяют идентифицировать параметры, которые мы не можем непосредственно измерять. Это направление имеет широкий спектр областей применения. Численное определение функции памяти актуально в различных средах и системах с памятью. Учитывая это, правильное математическое моделирование и изучение корректности прямых и обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости в средах с памятью, а также разработка эффективных вычислительных алгоритмов для таких задач является одним из приоритетных исследований и в теории, и в практике.

В нашей стране большое внимание уделяется фундаментальным наукам, которые имеют научное и практическое применение, в том числе обратным задачам математической физики и их численному решению. В связи с этим особое внимание было уделено определению ядра памяти и его численному построению в интегро-дифференциальных уравнениях гиперболического типа. В результате этих исследований удалось доказать существование и единственность решения обратных задач в слабо горизонтальных средах для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и построить численный метод определения функции памяти горизонтально-слоистой упругой среды с последействием. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов в области дифференциальных уравнений и математической физики выделено как основная задача фундаментальных исследований[1]. В обеспечении исполнения данного постановления важное значение имеет развитие теории интегро-дифференциальных уравнений математической физики.

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 “Об мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан” от 18 мая 2017 года.

Данная диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института математики имени В.И. Романовского академии наук республики Узбекистан», №-ПП-3876 «О мерах по дальнейшему повышению размеров оплаты труда работников сферы науки и высшего образования, а также государственной поддержке внедрения результатов научной и научно-технической деятельности» от 20 июля 2018, №-ПП-3752 «О мерах по совершенствованию деятельности научно-исследовательских институтов в социально-экономической сфере» от 29 мая 2018 года, №-УП-5953 «О государственной программе по реализации стратегии действий по пяти приоритетным направлениям развития Республики Узбекистан в 2017-2021 годах в «Год развития науки, просвещения и цифровой экономики»» от 2 марта 2020 года а также в других нормативно - правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствие с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Фундаментальный вклад в развитие теории обратных задач математической физики внесли исследования А.С. Алексеева, А.В. Баева, А.Л. Бухгейма, А.В. Гончарского, В.В. Васина, С.И. Кабанихина, М.Г. Крейна, М.М. Лаврентьева, А.И. Прилепко, В.Г. Романова, А.Н. Тихонова, В.Г. Яхно и других ученых. Первые постановки динамических обратных задач для гиперболических уравнений и систем были сформулированы и исследованы А.С. Алексеевым, М.М. Лаврентьевым, В.Г. Романовым, А.С. Благовещенским. Систематическое исследование динамических обратных задач для гиперболических уравнений и систем было проведено В. Г. Романовым.

Задачи определения ядра памяти в гиперболических уравнениях сравнительно молодое направление в теории обратных задач. Явление с памятью (запаздыванием) возникает в таких системах, где учитывается не только настоящее положение системы, но также все предыдущие положения, которые занимала данная система, иначе говоря, эти явления зависят от предыдущей истории системы. Примером может служит явление вязкоупругости, в котором деформация вязкоупругой среды зависит не только от природы применяемых сил, но также от предыдущих деформаций, которым была подвергнута среда. Другими явлениями такого рода являются распространение электромагнитных волн в средах с дисперсией, система популяций животных и растений различных видов в математической биологии.

Прямые и обратные задачи по определению функции памяти среды изучены для достаточно широкого круга задач. К примеру, здесь мы отметим работы А.С. Благовещенского, Д.А. Федоренко, А.Л. Бухгейма, М. Грассели, А. Лоренци, В.Г. Романова, С.И. Кабанихина, Д.К. Дурдиева, Н.И. Калининой, В.Г. Яхно, Я. Янно, Е.И. Шемякина. В этих работах исследовались одномерные обратные задачи определения ядра интегрального члена в гиперболических и параболических интегро-дифференциальных уравнениях с распределенными источниками в виде гладких функций возмущения, а также многомерные обратные задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа сосредоточенными (дельта–образными) источниками, локализованными в окрестности фиксированной точки или на поверхности рассматриваемой области. Получены теоремы существования, единственности и оценки условной устойчивости решений обратных задач. С другой стороны, весьма малое количество работ посвящено численным методам решения данных задач. Можно отметить на эту тему работы В.И. Дмитриева, Г.В. Аккуратова, А.Г. Фатьянова, А.Л. Карчевского. Во многих практических случаях используется горизонтально-слоистая модель среды. Из приведенных выше работ, надо отметить работы В.Г. Романова, Д.К. Дурдиева, А.С. Благовещенского и А.Л. Карчевского, которые в своей постановке, методике исследования и получении численных результатов наиболее близкие к диссертационной работе.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Ф – 4 – 02 «Термодинамика моделей математической физики с бесконечным множеством состояний» Бухарского государственного университета.

Целью исследования настоящей диссертационной работы является построение методов решения задач по определению двумерных ядер в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях второго порядка со слабо горизонтальной однородностью, исследование единственности и существования решения этих обратных задач.

Задачи исследования:

исследование однозначной разрешимости начально-краевых задач для гиперболического интегро-дифференциального уравнения второго порядка с волновым оператором в главной части;

получение глобальной разрешимости для задачи определения двумерного ядра интегрального члена специального вида, слабо зависящего от горизонтальной переменной x по заданному при $z = 0$ решению прямой задачи методом моментов;

исследование задачи нахождения двумерного специального ядра, слабо зависящего от горизонтальной переменной x по заданному при $z = 0$ решению прямой задачи методом преобразования Фурье;

исследование прямой и обратной задач для уравнения вязкоупругости, записанного для z компонента вектора смещений, в классе функций аналитических по пространственным и гладких по временной переменным, определение ядра интегрального члена по заданному при $y = 0$ решению прямой задачи, доказательство однозначной разрешимости обратной задачи и вывод оценки условной устойчивости;

построение численного метода по определению функции памяти горизонтально-слоистой упругой среды с последействием.

Объектом исследования являются гиперболические интегро-дифференциальные уравнения и уравнение вязкоупругости.

Предметом исследования являются двумерные прямые и обратные задачи для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений второго порядка со слабо горизонтальной однородностью и уравнение вязкоупругости.

Методы исследования. В диссертации использованы методы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений, а также уравнений математической физики. Однозначная разрешимость прямых и обратных задач доказана заменой задач замкнутой системой нелинейных интегральных уравнений второго рода Вольтеровского типа и дальнейшим применениям метода последовательных приближений и принципа сжимающих отображений. Доказательство теорем однозначной разрешимости в классе функций аналитических по пространственным и гладких по временной переменным проведено на основе метода шкал Банаховых пространств аналитических функций. Для проведения вычислительных экспериментов применялись современные технологии программирования.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказаны существование и единственности решения начально-краевых задач для гиперболического интегро-дифференциального уравнения второго порядка с волновым оператором в главной части;

методом преобразования Фурье и моментов доказана глобальная разрешимость задачи определения двумерного ядра интегрального члена, слабо зависящего от горизонтальной переменной x по заданному при $z = 0$ решению прямой задачи;

доказана локальная однозначная разрешимость задачи нахождения двумерного ядра в классе функций аналитических по пространственной и гладких по временной переменным;

построен численный метод по определению функции памяти горизонтально-слоистой упругой среды с последействием.

Практические результаты исследования использованы при изучении обратных задач математической физики, при численном определении параметров функции памяти горизонтально-слоистой среды, при определении интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа одномерных и многомерных ядер в их системах.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием методов теории дифференциальных уравнений, теории обратных задач и математического анализа, сравнением с точным решением задачи и проведением численных экспериментов.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследований объесняется тем, что в них была развита теория обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений математической физики, построен численный метод определения параметров функции памяти.

Практическая значимость результатов исследований заключается тем, что их можно применить к моделям геофизических и сейсмических наблюдений, к распространению упругих и электромагнитных волн в средах с памятью.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов по обратным задачам в слабо горизонтальных средах для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа:

предложенный метод нахождения двумерного ядра в интегро-дифференциальных уравнениях второго порядка гиперболического типа, слабо зависимый от горизонтальной переменной, был использован в проекте «Теоретическое и численное исследования прикладных геофизических задач динамики двухскоростных сред», регистрационный номер ОТ-Атех-2018-340 (справка №89-03-2472 от 8 июля 2020 года, Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан) для определения ядра в уравнении вязкоупругости. Используя полученные результаты, были изучены задачи определения ядра из уравнения вязкоупругости. Применение научных результатов позволило доказать существование и единственность проблемы определения ядра уравнения памяти в слабых горизонтальных средах;

методы численного определения параметров функции памяти в горизонтально-слоистых средах были использованы в рамках зарубежного проекта РНФ 18-19-00538 «Динамика и испарение капель жидкости на поверхностях с микро и нанопокрытием» (справка №250-5/705 от 7 июля 2020 года, Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук) для определения ядер в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях типа свёртки. Применение научных результатов, позволило построить численный метод определения функции памяти слоистого покрытия.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования обсуждены на 7 научно-практических конференциях, в том числе на 3 международных и 4 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 13 научных работ, из них 5 научных статей входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 2 опубликованы в зарубежных журналах и 3 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 117 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных и отечественных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется **«Задачи определения ядра памяти в слабо горизонтальных средах»**. В этой главе изучаются обратные задачи о нахождении ядра интегрального члена в интегро-дифференциальном уравнении гиперболического типа второго порядка. При этом ядро зависит как от времени, так и от одной пространственной переменной**.** Предполагается, что ядро слабо зависит от переменной x. В первом параграфе первой главы обратная задача изучается методом моментов. Рассмотрим начально-краевую задачу для интегро-дифференциального волнового уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{zz} = \int_0^t K\,(\tau, x) u(t-\tau, x, z) d\tau, \;\; t \in \mathbb{R}, \;\; (x,z) \in \mathbb{R}_+^2 \tag{1}$$

с начальным и граничным условиями

$$u|_{t<0} \equiv 0, \tag{2}$$

$$u_z|_{z=0} = \delta(x)\delta'(t), \tag{3}$$

где $\mathbb{R}_+^2 = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 | z > 0\}$, $\delta(x)$ –дельта-функция Дирака, а $\delta'(t)$-производная дельта-функции.

Обратную задачу поставим следующим образом: требуется найти ядро $K(x,t), t > 0, x \in \mathbb{R}$ интегрального члена в (1), если известны значения решения задачи (1)-(3) при $z = 0$, т.е. задана функция

$$u(t,x,0) = f(t,x), \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Предположим, что ядро K интегрального члена уравнения (1) слабо зависит от горизонтальной переменной x:

$$K(t,x) = K_0(t) + \varepsilon x K_1(t) + \cdots, \tag{5}$$

где ε- малый параметр.

Решение прямой задачи (1)-(3) будем искать в виде ряда по степеням ε, т.е

$$u(t,x,z) = u_0(t,x,z) + \varepsilon u_1(t,x,z) + \cdots. \tag{6}$$

Тогда, как следует из (4), $f(t,x)$ имеет вид

$$f(t,x) = f_0(t,x) + \varepsilon f_1(t,x) + \cdots.$$

$m -$ й момент функции u_n обозначим через v_{nm}:

$$v_{nm}(t,z) := \int_{-\infty}^{\infty} u_n\,(t,x,z)x^m dx.$$

Пусть

$$v_{nn|_{z=0}} = \int_{-\infty}^{\infty} f_n\,(t,x)x^n dx = a_n(t),\;\; n = 0{,}1, \tag{7}$$

где $a_n(t), n = 0{,}1 -$ заданные достаточно гладкие функции. Положим $n = m = 0$. Тогда для неизвестных K_0, v_{00} имеем следующую задачу:

$$v_{00tt} = v_{00zz} + \int_0^t K_0\,(\tau)v_{00}(t-\tau,z)d\tau, \tag{8}$$

$$v_{00}|_{t<0} \equiv 0,\;\; v_{00z}|_{z=0} = \delta'(t). \tag{9}$$

Решение задачи (8), (9) представим в виде

$$v_{00}(t,z) = -\delta(t-z) + v(t,z)\theta(t-z),$$

где $v(z,t) -$ регулярная функция. Тогда, как отсюда следует, для разрешимости обратной задачи функция $a_0(t)$ должна иметь структуру

$$a_0(t) = -\delta(t) + \theta(t)a(t),\;\; t \in \mathbb{R},$$

где $a(t) -$ известная регулярная функция. Тогда, дополнительное условие (7) при $n = 0$ для регулярной части v функции v_{00} принимает вид

$$v(t,0) = a(t), \qquad t > 0. \tag{10}$$

Теорема 1. Пусть $a(t) \in C^3[0,T]$ и $a(0) = a'(0) = 0$. Тогда для любого фиксированного $T > 0$ обратная задача (8)-(10) имеет единственное решение $K_0(t) \in C^1[0,T]$.

Далее будем определять функции K_1, v_{11}. Учитывая дополнительное условие (7) при $n = 1$ и прямую задачу при $n = m = 1$, сформулируем здесь основную задачу как задачу определения пару функций $v_{11}(t,z), K_1(t)$ из следующих равенств:

$$v_{11tt}{=}v_{11zz}{+}\int_0^t [K_0(t-\tau)v_{11}(\tau,z){+}K_1(t-\tau)v_{02}(\tau,z)]\,d\tau,\;\; (t,z){\in}\mathbb{R}^2_+, \tag{11}$$

$$v_{11}|_{t<0} \equiv 0,\;\; \frac{\partial}{\partial z}v_{11}\Big|_{z=0} = 0,\;\; v_{11}|_{z=0} = a_1(t),\;\; z > 0. \tag{12}$$

Теорема 2. Пусть $a_1(t) \in C^4[0,T]$ и $a_1(0) = a_1'(0) = a_1''(0) = a_1'''(0) = 0$. Тогда для любого фиксированного $T > 0$ обратная задача (11), (12) имеет единственное решение $K_1(t) \in C[0,T]$, $v_{11}(z,t) \in C(\square(0,T))$, где $\square(z,t) = \left\{(\xi,\tau) : |\xi| \le \tau \le t - |z-\xi|, \frac{z-t}{2} \le \xi \le \frac{z+t}{2}\right\}$.

Во втором параграфе первой главы, задача приведенная в первом параграфе решена методом преобразования Фурье. При этом уравнении (1) и (2) изучается со следующим граничным

$$u_z|_{z=0} = \delta'(x)\delta'(t)$$

и $u(t,x,0) = g(t,x)$ дополнительным условием. Функцию u будем искать в виде (6) и функцию K будем предпологать в виде (5). Перейдем от функции $u_j(t,x,z)$, $j = 1,2,\ldots$ к их экспоненциальным образам Фурье по переменной x:

$$\tilde{u}_j(t,\lambda,z) = \int_{\mathbb{R}} u_j\,(t,x,z)e^{-i\lambda x}dx,\;\; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Обратная задача в терминах функций $\tilde{u}_j$ выглядит следующим образом:

$$\tilde{u}_{ntt} - \tilde{u}_{nzz} - \lambda^2\tilde{u}_n = \int_0^t \sum_{j=0}^{n} i^j\, K_j(\tau)\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\tilde{u}_{n-j}(t-\tau,\lambda,z)d\tau, \tag{13}$$

$$\tilde{u}_n|_{t<0} \equiv 0,\;\; \tilde{u}_{nz}|_{z=0} = -i\lambda\delta'(t)\delta_{n0}, \tag{14}$$

$$\tilde{u}_n|_{z=0} = \tilde{g}_n(t,\lambda),\;\; (t,\lambda) \in \mathbb{R}^2,\;\; n = 0,1,2,\dots, \tag{15}$$

здесь $t \in \mathbb{R}$, $(\lambda, z) \in \mathbb{R}^2_+$, δ_{n0} - символ Кронекера и

$$\tilde{g}_m(t,\lambda) = \int_{\mathbb{R}} g_m\,(t,x)e^{-i\lambda x}dx,\;\; m = 0,1,2,\dots$$

При $n = 0$ получается обратная задача определения K_0, $\tilde{u}_0$ и при $n = 1$ функций K_1, $\tilde{u}_1$. Из теории гиперболических уравнений следует, что $\tilde{u}_0(t,\lambda,z) = 0$ при $0 < t < z$, $z > 0$. Поэтому $\tilde{u}_0$ удобно представить в виде

$$\tilde{u}_0(t,\lambda,z) = i\lambda\delta(t-z) + v(t,\lambda,z)\theta(t-z), \tag{16}$$

где $v(t,\lambda,z)$ – регулярная функция. Как следует из представления (16), для разрешимости обратной задачи функция $\tilde{g}_0(t,\lambda)$ должна иметь следующую структуру:

$$\tilde{g}_0(t,\lambda) = i\lambda\delta(t) + r(t,\lambda)\theta(t),\quad t \in \mathbb{R},$$

где функция $r(t,\lambda)$ удовлетворяет некоторым условиям гладкости по аргументу t. С учётом этого, дополнительное условие для функции v имеет вид

$$v|_{z=0} = r(t,\lambda),\quad t > 0.$$

Теорема 3. Пусть $r(t,\lambda) \in C^2[0,T]$ (гладкость по t) $r(0,\lambda) = 0$, $r'(0,\lambda) = -\frac{1}{4}i\lambda^3$. Тогда для любого фиксированного $T > 0$ обратная задача (13)-(15) (при $n = 0$) имеет единственное решение $K_0(t) \in C[0,T]$.

Теорема 4. Пусть выполнены следующие условия $\tilde{g}_1(0,\lambda) = 0$, $\tilde{g}_{1t}(0,\lambda) = 0$, $\tilde{g}_1(t,\lambda) \in C^2[0,T]$ при фиксированном λ. Тогда существует единственное решение задачи (13)-(15) (при $n = 1$) K_1 из класса непрерывных функций $C[0,T]$ для любого фиксированного $T > 0$.

В третьем параграфе первой главы рассмотрена начально-краевая задача для интегро-дифференциального двумерного уравнения вязкоупругости

$$u_{tt} - \Delta\, u = \int_0^t K\,(\tau,x)\,\Delta\, u(t-\tau,x,z)d\tau,\;\; t \in R,\;\; (x,z) \in \mathbb{R}^2_+ \tag{17}$$

с начальным

$$u|_{t<0} \equiv 0, \tag{18}$$

и граничным

$$\left[u_z + \int_0^t K\,(\tau,x)u_z(t-\tau,x)d\tau\right]_{z=0} = \delta(x)\delta'(t) \tag{19}$$

условиями, где $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 | z > 0\}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Обратную задачу поставим следующим образом: требуется найти ядро $K(t,x), t>0, x\in\mathbb{R}$ интегрального члена в (17), если известны значения решения задачи (17)-(19) при $z=0$, т.е. задана

$$u(t,x,0)=b(t,x),\ \ t>0,\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Умножая обе части уравнения (17) на x^m, интегрируя по x в пределах от минус до плюс бесконечности и учитывая равенства (8), (9) имеем

$$v_{n,mtt}-v_{n,mzz}=m(m-1)v_{n,m-2}+$$
$$+\int_0^t\sum_{j=0}^{n}K_j(\tau)[(m+j)(m+j-1)v_{n-j,m+j-2}(t-\tau,z)+$$
$$+v_{(n-j,m+j)zz}(t-\tau,z)]d\tau,\ \ (t,z)\in\mathbb{R}_+^2. \tag{20}$$

$$v_{n,m}|_{t<0}\equiv 0,$$
$$\left[v_{n,mz}+\int_0^t\sum_{j=0}^{n}K_j(\tau)v_{(n-j,m+j)z}(t-\tau,z)d\tau\right]_{z=0}=\delta_{n0}\delta_{m0}\delta'(t). \tag{21}$$

$$v_{n,n|_{z=0}}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}b_n(t,x)x^n dx=q_n(t),\ \ n=0{,}1. \tag{22}$$

Положим $n=m=0$. Тогда равенсва (20)-(22) приводят к задаче определения функций K_0 и v_{00} из следующих равенств:

$$v_{00tt}-v_{00zz}=\int_0^t K_0(\tau)v_{00zz}(t-\tau,z)d\tau, z>0,\ \ t\in\mathbb{R}, \tag{23}$$

$$v_{00}|_{t<0}\equiv 0,\ \ \left[v_{00z}+\int_0^t K_0(\tau)v_{00z}(t-\tau,z)d\tau\right]_{z=0}=\delta'(t), \tag{24}$$

$$v_{00}|_{z=0}=q_0(t). \tag{25}$$

Введем в рассмотрение новую функцию $\tilde{v}(z,t)$ в соответствии с равенством

$$\tilde{v}(t,z)=v_{00}(z,t)+\int_0^t K_0(t-\tau)v_{00}(\tau,z)d\tau.$$

В окрестности характеристической прямой $t=z$ для функция $\tilde{v}(t,z)$ верно представление $\tilde{v}(t,z)=-\delta(t-z)+v(t,z)\theta(t-z)$. Для разрешимости обратной задачи функция $q_0(t)$ должна иметь структуру $q_0(t)=-\delta(t)+\theta(t)q_{00}(t), t\in\mathbb{R}$.

Теорема 5. Пусть $T>0$ - фиксированное число, функция $q_0(t)$ представима в виде $q_0(t)=-\delta(t)+\theta(t)q_{00}(t)$, $q_{00}(t)\in C^2[0,T]$ и имеют места равенства $q_{00}(0)={q_{00}}'(0)=0$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (23)-(25) такое, что $K_0(t)\in C^2[0,T]$, $(v(t,z),v_t(t,z))\in C(D_T)$, где $D_T=\{(z,t)|\ 0\le z\le t\le T-z\}$.

Далее определяются функции K_1, v_{11} из равенств (20), (21) при $n=m=1$ и из (22) при $n=1$. Относительно решения этой задачи справедлива следующая теорема:

Теорема 6. Пусть $q_1(t)\in C^2[0,T]$ и $q_1(0)={q'}_1(0)=0$. Тогда для любого фиксированного $T>0$ обратная задача (20)-(22) (при $n=m=1$) имеет единственное решение $K_1(t)\in C[0,T], v_{11}(z,t)\in C(\square(0,T))$.

Во второй главе диссертации, названной «**Задача об определении двумерного ядра уравнения вязкоупругости**», рассматривается задача для интегро-дифференциального уравнения вязкоупругости**.**

В первом параграфе этой главы приводятся постановки прямой и обратной задачи. Рассмотрим при $(x,t)\in\mathbb{R}^2, y>0$ интегро–дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial y}L\left[k(x,t),\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial x}L\left[k(x,t),\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right], \qquad (26)$$

где $L[k(x,t),u(x,y,t)]$ - билинейный оператор, имеющий вид

$$L[k(x,t),u(x,y,t)]=u(x,y,t)+\int_0^t k\,(x,t-\tau)u(x,y,\tau)d\tau.$$

Предположим, что решение уравнение (26) удовлетворяет следующим начальным и граничным условиям:

$$u|_{t<0}\equiv 0,\;\; L\left[k(x,t),\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right]_{y=0}=-\frac{\delta'(t)}{2}. \qquad (27)$$

Обратная задача: определить ядро $k(x,t), t>0$, входящее в (26), если относительно решения прямой задачи (26), (27) известна дополнительная информация

$$u(x,y,t)|_{y=0}=g(x,t), t>0,$$

$g(x,t)$ - заданная функция. В дальнейшем задачу будем рассматривать в области $D_T=G_T\times R, G_T=\{(y,t)|\ 0\le y\le t\le T-y\},\ \ T>0.$

Во втором параграфе второй главы прямая и обратная задача заменяются эквивалентной замкнутой системой интегро-дифференциальных уравнений для неизвестных функций и их некоторых производных. Вводится в рассмотрение банахово пространство $A_s,\ s>0$, функций $\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}$, аналитических в окрестности начала координат, для которых справедливо соотношение

$$\|\varphi\|_s:=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{s^\alpha}{\alpha!}\left|\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\varphi(0)\right|<\infty.$$

Здесь $s>0$ – параметр шкали.

В третьем параграфе второй главы к системе, полученной в предыдущем параграфе, применяется метод шкал банаховых пространств аналитических функций. Доказывается теорема локальной однозначной разрешимости обратной задачи в классе функций, аналитических по переменной x и гладких по t.

Теорема 7. Пусть $g(x,t)=\frac{\delta(t)}{2}+\tilde g(x,t)\theta(t),\ \ \tilde g(x,0)=\tilde g_t(x,0)=0.$ Кроме того, $\left(\tilde g(x,t),\tilde g_t(x,t),\tilde g_{tt}(x,t)\right)\in C_t\left(A_{s_0};[0,T]\right)$. Тогда найдется такое число $b\in(0,T/2)$, что для любого $s\in(0,s_0)$ существует единственное решение

$$k(x,t)\in C_t^2\left(\,A_{s_0};[0,b(s_0-s)]\right)$$

обратной задачи.

Третья глава диссертации называется «**Численный метод определения функции памяти горизонтально-слоистой упругой среды с последействием»**. В первом параграфе этой главы приведена постановка основной задачи. Рассмотрим среду — n-слойную структуру с границами раздела $z_k,\ k=\overline{0,N},\ z_0=0$; m-ый слой находится в интервале $[z_{m-1}, z_m]$, последний $N+1$ (подстилающий) слой есть $[z_N, \infty)$ (Рис. 1). Физические свойства каждого слоя характеризуются скоростью распространения продольной волны, плотностью и характеристиками, отвечающими памяти среды, т.е. данные функции являются кусочно-постоянными функциями переменной z, $0 < z < \infty$.

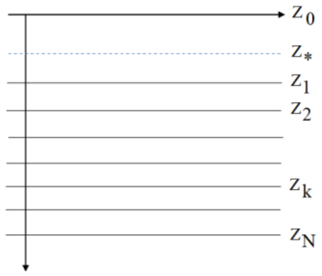


Рисунок 1. Модель среды.

Предположим, колебания среды возбуждаются взрывным источником, который моделируется как центр расширения, т.е. $f(t)\nabla\delta(x,y,z-z_*)$. Здесь z_* – глубина, на которую заглублен источник.

Рассмотрим в цилиндрической системе координат система Ламе, описывающая колебания однородной среды с памятью. Предположим, что коэффициенты Ламе и функции памяти не зависят от горизонтальной переменной r. Будем считать, что в каждом слое горизонтально-слоистой среды данные коэффициенты постоянны. Далее к этой системе применяем преобразование Фурье-Бесселя и после чего положим параметр $\nu = 0$, тогда можно получить следующее уравнение

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho V_p \frac{\partial u}{\partial z}\right) - f(t)\delta'(z-z_*), \tag{28}$$

здесь V_p – оператор

$$V_p u(t,z) = v_p^2 u(t,z) - \int_0^t h\,(t-\tau,z)u(\tau)d\tau,\ \ v_p = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}.$$

Считаем, что в начальный момент времени среда находилась в покое

$$u_z|_{t<0} \equiv 0. \tag{29}$$

Отсутствие напряжений на поверхности задаётся краевым условием

$$\left.\left(\rho V_p \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right|_{z=0} = 0. \tag{30}$$

Считаем, что в точках разрыва среды z_k поля напряжений и смещений непрерывны

$$\left[\rho V_p \frac{\partial u_z}{\partial z}\right]_{z_k} = 0, \quad [u_z]_{z_k} = 0. \tag{31}$$

Будем считать, что плотность среды ρ и скорость продольных волн в среде v_p известы. Нам необходимо определить функцию памяти $h(t,z)$.

Считаем, что относительно решения прямой задачи (28)-(31) известна дополнительная информация

$$u_z(t,0) = u_0(t). \qquad (32)$$

Известно, для широкого круга сред функция памяти может моделироваться следующей функцией

$$h(t,z) = \gamma \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Следовательно, будем искать функцию памяти в таком виде. Заметим, что в каждом слое параметры γ и α могут принимать различные значения, т.е. функции γ и α являются кусочно-постоянными.

Получим постановку прямой задачи в частотной области, с этой целью сделаем преобразование Лапласа по времени

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho w_p \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \rho p^2 v = F(p)\delta'(z - z_*), \qquad (33)$$

где $v(z,p)$, $F(p)$ – образы Лапласа функций $u_z(t,z)$ и $f(t)$ соответственно, $w_p = v_p^2 + \frac{\gamma}{p+\alpha}$. Краевые условия и условия склейки:

$$\left.\left(\rho w_p \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right|_{z=0} = 0, \qquad \left[\rho w_p \frac{\partial v}{\partial z}\right]_{z_k} = 0, \qquad [v]_{z_k} = 0. \qquad (34)$$

Добавим условие затухания на бесконечности

$$v \to 0 \ \ (z \to \infty). \qquad (35)$$

Дополнительную информацию (32) перепишем в виде:

$$v(0,p) = v_0(p). \qquad (36)$$

Поскольку источник моделируется δ-функцией, постановка обратной задачи (33)-(36) эквивалентна следующей постановке:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho w_p \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \rho p^2 v = 0, \qquad (37)$$

$$\left.\left(\rho w_p \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right|_{z=0} = 0, \quad v \to 0 \ \ (z \to \infty), \qquad (38)$$

$$\left[\rho w_p \frac{\partial v}{\partial z}\right]_{z_k} = 0, \quad [v]_{z_k} = 0, \qquad (39)$$

$$\left[\rho w_p \frac{\partial v}{\partial z}\right]_{z_*} = 0, \quad [v]_{z_*} = \frac{F(p)}{\rho w_p}, \qquad (40)$$

$$v(0,p) = v_0(p). \qquad (41)$$

Обратная задача (37)-(41) по определению кусочно-постоянных функций γ и α может быть решена при помощи минимизации функционала невязки

$$J[\gamma,\alpha] = \sum_{k=1}^{N_\omega} |\, v(0,p) - v_0(p)|^2, \quad p = \beta + i\omega_k, \qquad (42)$$

где ω_k принадлежит некоторому ограниченному интервалу, N_ω – количество частот из этого интервала.

Во втором параграфе третьей главы использован метод послойного пересчёта для вычисления функционала невязки. Для вычисления функционала невязки (42) необходимо уметь быстро решать прямую задачу (37)-(40) или находить значение $v(0)$. Для этого воспользуемся методом послойного пересчёта. Для этого рассмотрим функцию $s(z)$, которая удовлетворяет равенству:

$$\rho w_p \frac{\partial v}{\partial z} = sv, \tag{43}$$

где v есть решение дифференциального уравнения (37). Несложно проверить, что функция s удовлетворяет уравнению Риккати:

$$s' + \frac{s^2}{\rho w_p} = \rho p^2.$$

Можно получить условия склейки для функции s: $[s]_{z_k} = 0$. В каждом k-ом слое решение уравнения Риккати может быть получено в следующем виде:

$$s(z) = (\rho w_p r)_k \frac{(s^k/(\rho w_p)_k + r_k)e^{2r_k(z-z_k)} + (s^k/(\rho w_p)_k - r_k)}{(s^k/(\rho w_p)_k + r_k)e^{2r_k(z-z_k)} - (s^k/(\rho w_p)_k - r_k)}.$$

Здесь: $r = \sqrt{p^2/w_p}$, $\mathrm{Re}\{r\} > 0$. Используя условия склейки имеем $s(z_k + 0) = s(z_k - 0) \equiv s^k$. Из первого краевого условия (38) и равенства (43) следует, что $s(0) = 0$. Это означает, что решение уравнения Риккати на интервале $[0, z_*]$ имеет вид:

$$s(z) = (\rho w_p r)_1 \frac{1 - e^{-2r_1 z}}{1 + e^{-2r_1 z}}.$$

Условия склейки (40) и равенство (43) позволяют получить следующие соотношения:

$$s(z_* + 0)v(z_* + 0) - s(z_* - 0)v(z_* - 0) = 0,$$

$$v(z_* + 0) - v(z_* - 0) = \frac{F(p)}{(\rho w_p)_1},$$

$$v(z_* - 0) = \frac{F(p)}{(\rho w_p)_1} \frac{s(z_* + 0)}{s(z_* + 0) - s(z_* - 0)}.$$

Последное выражение может служить начальным условием для решения дифференциального уравнения (43) на интервале $[0, z_*]$. Поскольку на этом интервале вид функции $s(z)$ известен, то нетрудно получить решение уравнения (43) в следующем виде:

$$v(z) = e^{r_1(z-z_*)} \frac{1 + e^{-2r_1 z}}{1 + e^{-2r_1 z_*}} v(z_* - 0).$$

Вычисляем $v(0)$:

$$v(0) = \frac{2\, e^{-r_1 z_*}}{1 + e^{-2r_1 z_*}} v(z_* - 0).$$

В третьем параграфе третей главы использован метод сопряженных градиентов для минимизации функционала невязки и вычислен градиент функционала невязки.

Из за того что среда слоистая, γ и α являются кусочно-постоянными функциями и память m-ого слоя характеризуется постоянными значениями γ_m и α_m, тогда функционал невязки $J[\gamma,\alpha]$ (42) можно рассматривать как функцию $2N$ аргументов: $J[\dots,\gamma_m,\dots,\dots,\alpha_m,\dots]$. Тогда её градиент – это вектор

$$\nabla J[\dots,\gamma_m,\dots,\dots,\alpha_m,\dots] = \left(\dots,\frac{\partial J}{\partial \gamma_m},\dots,\dots,\frac{\partial J}{\partial \alpha_m},\dots\right)^T. \quad (44)$$

Для вычисления частных производных в (44) могут быть использованы следующие выражения:

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma_m} = \begin{cases} 0, & \text{если } \begin{array}{l} J(\dots,\gamma_m,\dots) \le J(\dots,\gamma_m + h_\gamma,\dots), \\ J(\dots,\gamma_m,\dots) \le J(\dots,\gamma_m - h_\gamma,\dots), \end{array} \\ \dfrac{J(\dots,\gamma_m + h_\gamma,\dots) - J(\dots,\gamma_m - h_\gamma,\dots)}{2h_\gamma}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_m} = \begin{cases} 0, & \text{если } \begin{array}{l} J(\dots,\alpha_m,\dots) \le J(\dots,\alpha_m + h_\alpha,\dots), \\ J(\dots,\alpha_m,\dots) \le J(\dots,\alpha_m - h_\alpha,\dots), \end{array} \\ \dfrac{J(\dots,\alpha_m + h_\alpha,\dots) - J(\dots,\alpha_m - h_\alpha,\dots)}{2h_\alpha}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Значения приращений h_γ или h_α выбираются в ходе решения обратной задачи на симулированных точных данных. Оптимальные значения приращений получаются из условия минимума итераций для нахождения минимума функционала невязки.

Пусть зависимость поведения источника от времени задана функцией

$$F(t) = A_0 \mathrm{e}^{-a_0 t} \cos(\omega_0 t),$$

где A_0 – амплитуда источника, a_0 определяет скорость затухания, частота $\omega_0 = 2\pi f_0$ является несущей. В численных экспериментах ниже положим: $A_0 = 10^9$, $a_0 = 10^2$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, $f_0 = 30$ Гц.

Рассмотрим следующую реалистичную модель среды:

	z_k, м	$\rho \cdot 10^{-3}$, кг/м³	$v_p \cdot 10^{-3}$, м/с	$\gamma \cdot 10^{-3}$, м²/с³	α, 1/с
слой 1	100	1.0	0.30	0.00	0.0
слой 2	800	1.3	0.70	0.00	0.0
слой 3	1500	1.5	1.00	0.00	0.0
слой 4	1510	2.0	1.30	2.10	30.0
слой 5	1525	2.1	1.33	2.12	50.0
слой 6	1540	2.0	1.31	2.19	30.0
слой 7	1570	2.2	1.34	2.14	34.0
слой 8	1600	2.3	1.33	2.53	50.0
слой 9	1700	2.4	1.50	0.00	0.0
слой 10	2000	2.4	1.70	0.00	0.0
слой 11		2.5	2.00	0.00	0.0

Рассмотрим поведение функционала невязки при вариациях его параметров. Рис.2 получен, когда варьировались величины γ_1 и α_1 в достаточно больших пределах, а остальные величины оставались неизменными. Варьирование других пар величин $\{\gamma_k,\alpha_k\}$ приводит к подобным результатам. На Рис. 2 а)-с) приведены примеры поведения функционала невязки, когда выбирались различные интервалы частот.

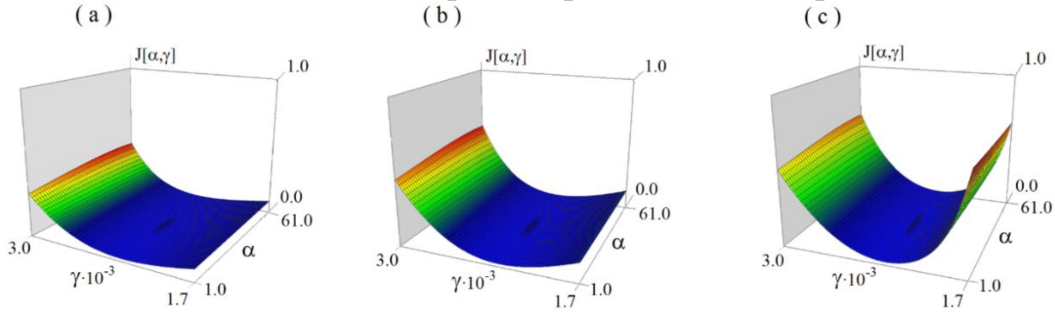


Рисунок 2. Примеры поведения функционала невязки при использовании различных интервалов временных частот, a) $\boldsymbol{f_0} \in [\mathbf{5}; \mathbf{25}]$ Гц, b) $\boldsymbol{f_0} \in [\mathbf{5}; \mathbf{50}]$ Гц, c) $\boldsymbol{f_0} \in [\mathbf{5}; \mathbf{75}]$ Гц.

Из результатов численного моделирования можно сказать, что наибольшие изменения функционала невязки происходят при использовании частот из интервала $[5; 75]$ Гц.

В четьвертем параграфе третей главы приведено численное решение обратной задачи. Метод сопряженных градиентов является одним из основных методов для минимизации функционала невязки. При использовании этого метода минимизационная последовательность организуется следующим образом:

$$G^{k+1} = G^k - \theta_k P_k, \quad G = \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \end{bmatrix},$$

где k – номер итерации, G^0 – начальное приближение для искомых функций, P_k – сопряженное направление и

$$P_0 = J'[G^0], \;\; P_k = J'[G^k] + \beta_k P_{k-1}, \;\; \beta_k = \frac{\| J'[G^k] \|^2}{\| J'[G^{k-1}] \|^2}, \;\; k = 1,2,\ldots,$$

где параметр θ_k – шаг метода и является решением задачи минимизации функции одной переменной

$$\theta_k = \arg \min_{\theta} J\,[G^k - \theta P_k].$$

Для тестирования данного алгоритма опираемся на симулированные данные, другими словами при помощи решения соответствующей прямой задачи вычисляются необходимые величины, после этого в значения функций, играющих роль дополнительной информации, добавляется следующая случайная ошибка

$$\tilde{v}_0 = v_0 \left(1 + \frac{Pr}{100} \xi\right),$$

где Pr – величина ошибки в процентах, ξ– комплексная случайная величина нормально распределённая на единичном круге. Для численного решения обратной задачи были выбраны следующие параметры:

- для построения функционала невязки: количество временных частот $N_\omega = 200$ из интервала $[5; 80]$ Гц с равным шагом, $\beta = 10^{-2}$;
- для вычисления градиента функционала невязки: $h_\gamma = 10^{-7}$ и $h_\alpha = 10^{-7}$;
- шаг метода сопряженных градиентов θ_k вычислялся с точностью 10^{-8}.

В обратной задаче определялись параметры памяти среды γ_k и α_k ($k = \overline{4,8}$), являющиеся параметрами тонкослоистой пачки слоёв. Начальное приближение $\gamma_k = 10^3$ м^2/с^3 и $\alpha_k = 10$ 1/с ($k = \overline{4,8}$). Результаты численных экспериментов представлены на Рис. 3.

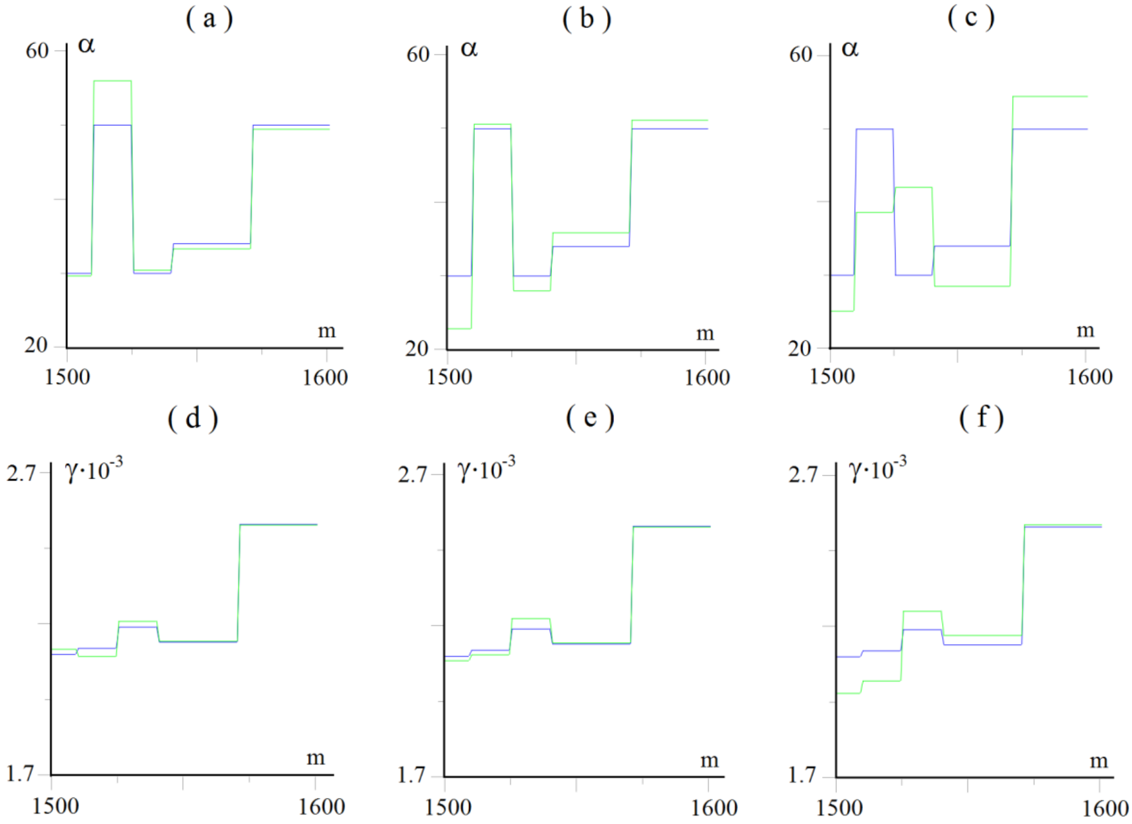


Рисунок 3. Примеры восстановления параметров a)-c) **α**, d)-f) **γ**; примеры восстановления с ошибкой в данных обратной задачи a), d) 3%, b), e) 5% и c), f) 10%. Точное значение указано синей линией, восстановленное – зелёной.

Анализ восстановленных параметров показывает, что при ошибке 3% в данных обратной задачи (46) максимальная относительная ошибка при восстановлении параметров γ_k составляет 4%, α_k ($k = \overline{1,4}$) – 12%. При ошибке 5% — 6% и 24%, при ошибке 10% — 10% и 40% соответственно. Видно, что овражность функционала невязки влияет на точность определения параметров α_k значительно сильнее, чем на точность определения параметров γ_k.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследованы обратные задачи нахождения двумерного ядра в интегро-дифференциальных уравнениях гиперболического типа второго порядка для слабо горизонтальных сред.

Основные результаты исследований:

доказаны однозначная разрешимость начально-краевых задач для гиперболического интегро-дифференциального уравнения второго порядка с волновым оператором в главной части, существование и единственности решения;

методом преобразования Фурье и моментов доказана глобальная разрешимость задачи определения двумерного ядра интегрального члена, слабо зависящего от горизонтальной переменной x по заданному при $z = 0$ решению прямой задачи;

доказана локальная однозначная разрешимость задачи нахождения двумерного ядра в классе функций аналитических по пространственной и гладких по временной переменным;

построен численный метод по определению функции памяти горизонтально-слоистой упругой среды с последействием, численно моделирован и выбран оптимальный интервал частот для построения функционала невязки, представлены численные примеры, иллюстрирующие решение обратной задачи.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 SAMARKAND STATE UNIVERSITY

BUKHARA STATE UNIVERSITY

BOZOROV ZAVKIDDIN RAVSHANOVICH

INVERSE PROBLEMS FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF A HYPERBOLIC TYPE IN WEAKLY HORIZONTAL MEDIA

01.01.02 – Differential Equations and Mathematical Physics

ABSTRACT OF DISSERTATION
of the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

Bukhara – 2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2020.2.PhD/FM459.

The dissertation was performed at the Bukhara branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan and Bukhara State University.

The abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website www.samdu.uz and in the website «ZiyoNet» Information and educational portal (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific superviser:	**Durdiev Durdimurod Kalandarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Khasanov Aknazar Bekdurdievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Karchevsky Andrey Leonidovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Russian)
Leading organization:	**National University of Uzbekistan**

Defense will take place «____» _____________2020 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand city, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866)231-06-32, fax: (+99866)235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand State University (is registered №___) (Address: University Boulevard 15, Samarkand city, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866)231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2020 year
(Mailing report № ____ on «____» ___________ 2020 year)

A.S. Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degree, D.F.M.S., professor

A.M. Khalkhuzhayev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degree, D.F.M.S.

A.B. Khasanov
Chairman of Scientific seminar under scientific council on award of scientific degree, D.F.M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the research work is to construct methods for solving problems of determining two-dimensional kernels in second-order hyperbolic integro-differential equations with weakly horizontal homogeneity, to study the uniqueness and existence of a solution to these inverse problems.

The object of the research work is hyperbolic integro-differential equations and the equation of viscoelasticity.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the existence and uniqueness of the solution of initial-boundary value problems for a hyperbolic integro-differential equation of the second order with a wave operator in the main part are proved;

the global solvability of the problem of determining the two-dimensional kernel of an integral term that weakly depends on the horizontal variable x for a given direct problem solution at $z = 0$ has been proved by the method of the Fourier transform and moments;

the local unique solvability of the problem of finding a two-dimensional kernel in the class of functions that are analytic in spatial variables and smooth in time variables has been proved;

a numerical method is constructed to determine the memory function of a horizontally layered elastic medium with aftereffect.

Practical research results of the research are used in the study of inverse problems of mathematical physics, in the numerical determination of the parameters of the memory function of a horizontally layered medium, in the determination of integro-differential equations of hyperbolic type of one-dimensional and multidimensional kernels in their systems.

The reliability of the research results is substantiated by the rigor of mathematical reasoning and proofs, the use of methods of the theory of differential equations, the theory of inverse problems and mathematical analysis, comparison with the exact solution of the problem and the conduct of numerical experiments.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, conclusion and list of references. The volume of the dissertation is 117 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Bozorov Z.R. Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect // Eurasian journal of mathematical and computer applications. DOI: 10.32523/2306-6172-2020-8-2-4-16, Volume 8, Issue 2 (2020) pp. 4 – 16 (Scopus, Web of Science, IF=0.42)

2. Бозоров З.Р. Задача об определении двумернерного ядра уравнения вязкоупругости // Сибирский Журнал Индустриальной Математики. Т. 23, -№1-2020, С. 28-45. (Scopus, IF=0.58.)

3. Дурдиев Д.К., Бозоров З.Р. Квазидвумерная обратная задача определения ядра интегрального члена в уравнении вязкоупругости // Научный вестник. - Бухара 2020 г. -№3(79). С. 10 - 21 (01.00.00; №3)

4. Бозоров З.Р. Обратная задача об определении двумерного ядра уравнения вязкоупругости аналитического по пространственной переменной // Научный вестник.- Бухара 2018 г. -№1(69). С. 26 - 39 (01.00.00; №3)

5. Дурдиев Д.К., Бозоров З.Р. Задача определения двумерного ядра специального вида в интегро-дифференциальном уравнении гиперболического типа // Узбекский математический журнал. – Ташкент 2017. -№2, С. 45 -57 (01.00.00; №6)

II бўлим (Часть II; Part II)

6. Дурдиев Д.К., Бозоров З.Р. Задача определения ядра интегро-дифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью // Дальневосточный математический журнал. С. 209-221, Т.13 -№2-2013

7. Бозоров З.Р. Численный метод определения функции памяти горизонтально-слоистой упругой среды с последействием // «Математика, физика ва ахборот технологияларининг долзарб муаммолари» мавзусидаги Республика миқёсидаги онлайн илмий-амалий анжумани, 15 апрель 2020 йил, Бухоро, 178-179 б.

8. Бозоров З.Р. Задача об определении двумернерного ядра уравнения вязкоупругости // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам, 17-29 сентября, 2019 г., Крим, С. 154-156.

9. Дурдиев Д.К., Бозоров З.Р. Задача определения ядра интегро-дифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью. Метод моментов. // Материалы XIV Международной научной конференции “Порядковый анализ и смежные вопросы

математического моделирования” с. Цей, 3-8 июля, 2017 г., Владикавказ, С. 96-98.

10. Bozorov Z.R. The problem of the determination kernel integro-differential wave equation with weakly horizontal by homogeneity. Fourier’s method. // Abstracts of VI congress of the Turkic world mathematical society. October 2-5, 2017, Astana, Kazakhstan. p.54.

11. Дурдиев Д.К., Бозоров З.Р. Решение двумерной обратной задачи специального вида для интегро-дифференциального уравнения методом моментов // Тезисы докладов конференции с участием зарубежных учёных “Проблемы современной топологии и её приложение”, 11-12 мая, 2017 г., Ташкент, С. 178-179.

12. Дурдиев Д.К., Бозоров З.Р. Задача восстановления ядра интегродифференциального волнового уравнения слабо горизонтально – неоднородной среды // Материалы Республиканской научной конференции “Актуальные проблемы математического анализа”, 9-10 ноября, 2012 г., Ургенч, С.80-81.

13. Дурдиев Д.К., Бозоров З.Р., Обратная задача для волнового уравнения с памятью в среде со слабо горизонтальной однородностью // Тезисы научно – практического семинара “Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа”, 5-6 июля, 2012 г., Самарканд, С. 25 – 26.