УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА БЕРУВЧИ PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

РАҲМОНОВ АСКАР АҲМАДОВИЧ

ЁПИШҚОҚ–ЭЛАСТИК ҒОВАК МУҲИТДА ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ УЧУН ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

БУХОРО – 2020

УДК: 517.958

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА БЕРУВЧИ PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

РАҲМОНОВ АСКАР АҲМАДОВИЧ

ЁПИШҚОҚ–ЭЛАСТИК ҒОВАК МУҲИТДА ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ УЧУН ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАР

01.01.02–Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

БУХОРО – 2020

Фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.2.PhD/FM221 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Бухоро давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида(www.ik-mat.urdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Дурдиев Дурдимурод Қаландарович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Зикиров Обиджон Солижонович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Яхшимуратов Алишер Бекчанович физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд давлат университети**

Диссертация ҳимояси Урганч давлат университети ҳузуридаги PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 рақамли Илмий кенгашнинг «___»___________ 2020 йил соат____ даги онлайн мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 220100, Урганч ш., Ҳ.Олимжон кўчаси, 14-уй. Тел.: (+99862) 224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00; e-mail: ik_mat.urdu@umail.uz).

Диссертация билан Урганч давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (__________-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 220100, Урганч ш., Ҳ. Олимжон кўчаси, 14-уй. Тел.: (+99862) 224-66-11; факс: (99862) 224-67-00).

Диссертация автореферати 2020 йил «____» ________________куни тарқатилди.
(2020 йил «____» ____________ даги ________ рақамли реестр баённомаси).

Б.И. Абдуллаев
Илмий даража берувчи Илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д.

А.А. Атамуратов
Илмий даража берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

С.А. Имомқулов
Илмий даража берувчи Илмий
кенгаш қошидаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д.

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда интегро–дифференциал тенглама ёки тенгламалар системаси учун тескари масалаларни тадқиқ қилиш каби масалаларга келтирилади. Табиий фанларда баъзи жараёнларни математик моделлаштириш муҳитнинг хотирасини ҳисобга олувчи интегро–дифференциал тенглама ёки тенгламалар системасига олиб келинади. Бундай системаларнинг айни пайтдаги ҳолати унинг олдинги ҳолатларига боғлиқ бўлиб, интегро–дифференциал тенгламалар билан ифодаланади. Гиперболик типдаги интегро–дифференциал тенгламаларнинг интеграл ядросини аниқлаш масалалари йигирманчи асрнинг 80-йиллари сўнгида пайдо бўлган тескари масалалар назариясидаги нисбатан янги йўналиш ҳисобланади. Бундай масалаларни ечиш усулларининг зарур даражада шаклланмаганлиги ушбу йўналишдаги баъзи муаммоларни ҳал этишда муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда илмий тадқиқотлар хотирага эга бўлган жараёнлар учун тескари масалаларни ўрганишга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Математик нуқтаи назардан, муҳитнинг хотирасини ҳисобга олиш қаралаётган эластиклик назариясининг математик моделига жараённинг олдинги ҳолатини ифодаловчи ўрама кўринишдаги интеграл ҳадни киритишга олиб келинилади. Шундай қилиб, интегро–дифференциал тенгламалар билан боғлиқ баъзи тескари масалаларни ўрганиш зарурати туғилди. Тадбиқларда тайин нуқта ёки соҳа чегараси атрофида жамланган делтасимон манбаларга эга масалаларни ўрганиш муҳимдир. Айнан шу типдаги долзарб илмий тадқиқотлар ушбу диссертация ишида қаралади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган интегро–дифференциал тенгламалар ва математик физиканинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, охирги йилларда ёпишқоқ–эластик ғовак муҳитда тўлқин тарқалиш жараёнларини ифодаловчи интегро–дифференциал тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалаларни тадқиқ этиш, улар учун тескари масалаларни ечиш орқали амалий муаммоларни ҳал этиш борасида салмоқли натижаларга эришилди. «Дифференциал тенгламалар, математик физика ва функционал анализ» фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Бу қарор ижросини таъминлашда математик физиканинг интегро-дифференциал тенгламалар системаси учун тескари масалаларни ечиш методларини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947 Фармони, 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387 Қарорлари ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Гиперболик тенгламалар ва системалар учун динамик масалалар биринчилардан бўлиб М.М.Лаврентьев, В.Г.Романов, А.С.Благовещенский, А.С.Алексеев, К.В.Винклер ва Д.Л.Джонсонлар томонидан қўйилган ва ўрганилган. Масалаларни тадқиқ қилишнинг турли усуллари В.Г.Романов, А.С.Благовещенский, Я.Янно, А.Лоренци, А.Л.Бухгейм, Д.К.Дурдиев, Х.Х.Имомназаровнинг ишларида батафсил баён қилинган. Юқоридаги олимлардан В.Г.Романов, А.С.Благовещенский, А.Лоренци, Д.К.Дурдиев ва Х.Х.Имомназаровларнинг ишлари диссертация татқиқотларига яқин бўлиб, улар томонидан тавсия этилган усуллардан фойдаланилган.

Ғовак муҳитларда стационар бўлмаган жараёнларни ўрганишда кўпинча Био [М.А. Биот] типидаги назариялар қўлланилади. Бироқ, аниқ Био назарияга асосланган назарий тадқиқотларни экспериментал натижалар билан табиий наъмуналарда таққослаш бўйича натижалар нисбатан кам. Эластик тўлқинлар тарқалиш назариясининг амалий масалаларида кўпинча муҳитнинг ғоваклиги, суюқлик билан тўлдирилгани ва гидродинамик хусусиятларни ҳисобга олишга тўғри келади. Био назариясига асосланган ҳолда В.Н. Доровский эластик ғоваксимон деформацияланадиган муҳитда суюқликни филтрлашнинг чизиқли бўлмаган математик моделини қурди. Модел учта асосий принципга асосланади: сақланиш қонунларининг бажарилиши, Галилейнинг нисбийлик принципи, ҳаракат тенгламаларининг термодинамик мувозанат шароитларига мослиги.

Эластик ғоваксимон деформацияланадиган муҳитда суюқликни филтрлашнинг математик модели чизиқли бўлган ҳол учун А.Б.Холмуродов томонидан ғовак изотроп муҳитларда SH (кўндаланг) тўлқин тарқалиш жараёнини ифодаловчи дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалалар ўрганилган, ундан ташқари эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тенгламасининг сингуляр ечими, эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тарқалиш жараёнининг сонли ечиш усули ва унга мос дастур яратилган. Бугунги кунда бевосита амалий тадбиқга эга бу соҳа кўплаб математикларнинг илмий қизиқишлари предмети бўлиб хизмат қилмоқда.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Бухоро давлат университетининг Ф-4-02 «Математик физиканинг ҳолатлар тўплами чексиз бўлган моделлари термодинамикаси» (2017-2020) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади ёпишқоқ–эластик ғовак муҳитда интегро–дифференциал тенгламалар системаси учун бир ва икки ўлчамли тескари динамик масалаларини ечиш усулларини қуриш, шунингдек бу ечимларнинг мавжудлик ва ягоналик теоремаларини исботлаш, ҳамда турғунлик баҳоларини олишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

вертикал йўналишда бир жинсли бўлмаган ёпишқоқ–эластик ғовак изотроп муҳит учун қўйилган тескари масаланинг ягона ечими мавжудлиги тўғрисидаги глобал ва локал теоремаларни исбот қилиш, ҳамда турғунлик баҳоларини олиш;

ёпишқоқ–эластик тенгламалар системаси учун Ламе параметрини аниқлаш, қўйилган тескари масала ечими етарлича кичик оралиқда мавжудлиги ва ягоналиги, шунингдек масалада берилганларнинг ечимга узлуксиз равишда боғлиқлиги ҳақидаги теоремаларини исбот қилиш;

фазовий ўзгарувчи бўйича аналитик ва вақт бўйича узлуксиз бўлган интеграл ҳадни аниқлаш бўйича тескари масаланинг локал бир қийматли ечилиши ҳақидаги теоремани исбот қилиш;

горизонтал йўналишда кучсиз боғланишли, бир жинсли бўлмаган ёпишқоқ–эластик ғовак муҳитда қўйилган икки ўлчамли ядрони аниқлаш масаласининг ягона ечими мавжудлиги ҳақида глобал теоремани исбот қилиш ва турғунлик баҳоларини олиш.

Тадқиқотнинг объекти: Ўрама типдаги иккинчи тартибли интегро–дифференциал тенгламалар системаси учун бир ва икки ўлчамли ядрони аниқлаш тўғрисидаги тескари масалалар.

Тадқиқотнинг предмети: Ўрама типдаги иккинчи тартибли интегро–дифференциал тенгламалар системаси учун бир ва икки ўлчамли тескари масалалар, эластик-ёпишқоқлик тенгламалари.

Тадқиқотнинг усуллари: Диссертация ишида хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва интеграл тенгламалар назарияси, шунингдек функционал анализ методларидан фойдаланилган. Тўғри ва тескари масалаларнинг бир қийматли ечилувчанлиги улар Вольтерра типидаги иккинчи тур чизиқли бўлмаган ёпиқ интеграл тенгламалар системаси билан алмаштирилиб, сўнгра уларга қисқартириб акслантиришлар принципи, кетма-кет яқинлашиш усули қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

вертикал йўналишда бир жинсли бўлмаган ёпишқоқ–эластик ғовак изотроп муҳит учун қўйилган тескари масаланинг ягона ечими мавжудлиги тўғрисидаги глобал ва локал теоремалар исбот қилинган, ҳамда турғунлик баҳолари олинган;

ёпишқоқ–эластик тенгламалар системаси учун Ламе параметри аниқланган, қўйилган тескари масала ечимининг етарлича кичик оралиқда мавжудлиги ва ягоналиги, шунингдек масалада берилганларнинг ечимга узлуксиз равишда боғлиқлиги ҳақидаги теоремалар исбот қилинган;

фазовий ўзгарувчи бўйича аналитик ва вақт бўйича узлуксиз бўлган интеграл ҳадни аниқлаш бўйича тескари масаланинг локал бир қийматли ечилиши ҳақидаги теорема исбот қилинган;

горизонтал йўналишда кучсиз боғланишли, бир жинсли бўлмаган ёпишқоқ–эластик ғовак муҳитда қўйилган икки ўлчамли ядрони аниқлаш масаласининг ягона ечими мавжудлиги ҳақида глобал теорема исбот қилинган ва турғунлик баҳолари олинган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Тадқиқот натижалардан сейсмологияда, нефт ва газ конларини қидиришда ва олий таълимда таҳсил олаётган юқори курс бакалавр талабалари ва магистратура талабалари учун математик физика фанидан махсус маърузалар курсларини ўқишда фойдаланиш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Функционал анализ, дифференциал тенгламалар назарияси, тескари масалалар назарияси, математик анализ усулларидан ва қўзғалмас нуқталар ҳақидаги теоремалардан фойдаланилган. Олинган натижалар математик жиҳатдан тўғри исботланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Диссертация иши асосан назарий жиҳатдан ўрганилган бўлиб, аниқ ҳисоблаш алгоритмларни шакллантириш ва амалий геофизика, хусусан сейсмик қидирув билан боғлиқ долзарб амалий муаммоларни ҳал қилиш учун асосдир.

Олинган натижалардан математик физика тенгламалари учун тескари ва нокоррект масалалар назарияси бўйича кейинги тадқиқотларда ҳам фойдаланиш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Ёпишқоқ–эластик ғовак муҳитда интегро–дифференциал тенгламалар системаси учун тескари масалалар бўйича олинган натижалар асосида:

Ёпишқоқ–эластик ғовак муҳитда интегро–дифференциал тенгламалар системаси учун тескари масалалардан ОТ-Ф4-69 рақамли лойиҳасида ёпишқоқ–эластик ғовак муҳитлардаги интегро–дифференциал тенгламалар системаси учун қўйилган тескари масалаларни тадқиқ этишда фойдаланилган. (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта-махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 8 июлдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши сфера устидаги умумлашган функцияни аниқлаш масаласининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш имкониятини берган;

Тескари масалаларни тадқиқ этишнинг таклиф этилган усулидан АААА-А19-119032590069-3 рақамли хорижий грантда изотроп ва анизотроп муҳитларда ёпишқоқ–эластиклик бир ўлчамли тескари масалаларни тадқиқ этишда фойдаланилган. (Южный Математический Институт филиал ФГНБУ ФНЦ “Владикавказский научный центр РАН”, 2020 йил 7 июлдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши ёпишқоқ-эластик ғовак муҳит асосий харатеристикаларини аниқлаш, сонли алгоритмини ишлаб чиқиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 2 та халқаро ва 3 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 12 та илмий иш чоп этилган, шулардан, 3 таси Scopus рўйхатига киритилган халқаро илмий журналларда, 4 таси Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертацияларини ҳимоя қилишда тавсия этилган миллий журналларда чоп қилинган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш, уч боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 106 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Диссертациянинг биринчи боби **«Ёпишқоқ–эластик ғоваксимон муҳитда интегро–дифференциал тенгламалар системаси учун бир ўлчамли тескари масалалар»** деб аталади. Бу бобнинг биринчи параграфида диссертация натижаларни исботлашда фойдаланилган асосий тушунчалар, теоремалар келтирилган. Иккинчи параграфда ёпишқоқ–эластик ғовак муҳитда SH(кўндаланг)-тўлқинли интегро–дифференциал тегламалар системаси

$$\rho_s \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\Sigma(z,t) - \chi\rho_l^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(U - V\right),\ t \in \mathbb{R},\ \ z > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \chi\rho_l \left(U - V\right),\ \ t \in \mathbb{R},\ \ z > 0 \tag{2}$$

учун умумлашган $U(z,t), V(z,t)$ ечимни топиш масаласи

$$U\Big|_{t<0} = \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t<0} \equiv 0,\quad V\Big|_{t<0} \equiv 0,\quad \Sigma(+0,t) = \delta'(t) \tag{3}$$

бошланғич ва чегаравий шартлар билан қаралган. Бу ерда $U(z,t)$, $V(z,t)-$мос равишда эластик ғовак жисм ва суюқликлардаги тўлқин тезликлари, ρ_s ва ρ_l лар мос равишда эластик ва ғовак (суюқлик билан тўлдирилган) жисмларнинг доимий парциал зичликлари, $\chi-$ишқаланиш коэффициенти, бу ерда ва бундан кейин улар ўзгармас ва мусбат деб фараз қилинади, $\delta'(t)$ Диракнинг дельта-функцияси ҳосиласи. $\Sigma(z,t)$ кучланиш $U(z,t)$ тезлик билан қуйидагича боғланган:

$$\Sigma(z,t) = \mu(z)\frac{\partial U}{\partial z} + \int_0^t k(t-\tau)\mu(z)\frac{\partial U}{\partial z}(z,\tau)d\tau, \tag{4}$$

бу ерда $\mu(z)-$Ламе параметри, $k(t)$ муҳитнинг қовушқоқлигини ифодалайди.

Тескари масала тўғри масала (1)-(4) ечими ҳақида

$$U\,|_{z=0} = f(t) \tag{5}$$

қўшимча маълумот бўйича $k(t),\, t > 0$ узлуксиз функцияни аниқлашдан иборат, бу ерда $f(t)$-берилган функция. Бунда $k(t)$ функция (1) тенгламага (4) формула орқали киради.

Янги ўзгарувчи y ни қуйидаги формула билан киритамиз:

$$y = \int_0^z \frac{d\xi}{c(\xi)},\quad c(z) := \sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho_s}}. \tag{6}$$

$l(y)$ функция орқали y ва z ўзгарувчилар орасидаги боғланишни ва

$$\frac{\chi\rho_l^2}{\rho_s} = \lambda,\quad \tilde{\mu}(y) = \mu(l(y)). \tag{7}$$

каби белгилашларни киритамиз.

(1)-(5) масалани $D_T = \left\{(y,t) : 0 \le y \le t \le T - y\right\}$ соҳада қараймиз.

Теорема 1. *Фараз қилайлик қуйидаги шартлар бажарилсин: 1)* $f(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{\rho_s \tilde{\mu}(0)}}\delta(t) + \theta(t) f_{00}(t),$ *тенглик ўринли бўлсин, бу ерда* $f_{00}(t) \in C^2[0,T]$ *– берилган функция ва* $\theta(t)$ *– Хевисайд функцияси:* $\delta(t) = (d/dt)\theta(t)$*; 2)* $\tilde{\mu}(y) \in C^3[0,T/2].$

У ҳолда ихтиёрий фиксирланган $T > 0$ *учун (1)-(5) тескари масаланинг ягона ечими* $k(t) \in C^2[0,T]$ *мавжуд.*

$M(h_0)$ орқали $t \in [0,T]$ учун $\| k(t) \|_{C^2[0,T]} \le h_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $k(t) \in C^2[0,T]$ функциялар тўпламини белгилаймиз, бунда h_0 – фиксирланган мусбат сон.

Теорема 2. *Фараз қилайлик* $k^{(1)}(t) \in M(h_0)$ *ва* $k^{(2)}(t) \in M(h_0)$ *лар (1)-(5) тескари масаланинг* $\left(\tilde{\mu}^{(1)},\, f_{00}^{(1)}\right)$*,* $\left(\tilde{\mu}^{(2)},\, f_{00}^{(2)}\right)$ *қўшимча шартларга мос келувчи ечимлари бўлсин. У ҳолда шундай мусбат* $d_1 = d_1(h_0, h_{00}, T),$

$$h_{00} = \max\left\{\| \tilde{\mu}^{(1)}(y) \|_{C^3[0,T/2]}, \| f_{00}^{(1)}(t) \|_{C^2[0,T]}, \| \tilde{\mu}^{(2)}(y) \|_{C^3[0,T/2]}, \| f_{00}^{(2)}(t) \|_{C^2[0,T]}\right\},$$

сон топилиб, қуйидаги баҳо ўринли:

$$\| k^{(1)}(t) - k^{(2)}(t) \|_{C^2[0,T]} \le d_1 \left[\| \tilde{\mu}^{(1)} - \tilde{\mu}^{(2)} \|_{C^3[0,T/2]} + \| f_{00}^{(1)} - f_{00}^{(2)} \|_{C^2[0,T]} \right].$$

Қуйидаги теорема турғунлик ҳақидаги 2-теореманинг натижаси ҳисобланади.

Теорема 3. *Фараз қилайлик,* $k^{(i)} \in C^2[0,T]$ *ва* $\tilde{\mu}^{(i)}, f_{00}^{(i)}, i = 1,2$ *функциялар 2-теорема шартларини қаноатлантирсин. У ҳолда, агар барча* $(y,t) \in D_T$ *лар учун* $\tilde{\mu}^{(1)}(y) = \tilde{\mu}^{(2)}(y),\ f_{00}^{(1)}(t) = f_{00}^{(2)}(t)$ *бўлса,* $k^{(1)}(t) \equiv k^{(2)}(t),\ t \in [0,T]$ *бўлади.*

1.3 параграфда қуйидаги тескари масала ўрганилган: қўшимча (5) шарт берилганда (1)-(4) тенгламалардан Ламе коэффициенти $\mu(z)$ ни топиш талаб этилади (бунда $k(t)$ маълум деб қаралади).

Теорема 4. $T > 0$ *фиксирланган сон,* $f(t)$ *эса 1-теоремадаги кўринишда ва* $k(t) \in C^2[0,T]$ *бўлсин. У ҳолда етарлича кичик* $T_0 \in (0,T]$ *лар учун (1)-(5) тескари масаланинг* $C^3\left[0,T_0/2\right]$ *синфга тегишли ягона* $\tilde{\mu}(y)$ *ечими мавжуд.*

(1)-(5) тескари масала ечимининг шартли турғунлигини ифодаловчи теоремани келтирамиз. Бундай баҳони олишда берилган функциялар $f_{00}(t), k(t)$ учун $\tilde{Q}_0(M_1, \tilde{\mu}(0), \tilde{\mu}'(0), k(0), f_{00}(0), \lambda, T) := \tilde{Q}(M_1, T)$ синф ва номаълум функция $\tilde{\mu}(y)$ учун эса $Q_0(M, \tilde{\mu}(0), \tilde{\mu}'(0), k(0), f_{00}(0), \lambda, T_0) := Q(M, T_0)$ синфларни киритамиз. Агар $\| f_{00} \|_{C^2[0,T]} \le M_1$, $\| k \|_{C^2[0,T]} \le M_1$ ва $\| \tilde{\mu} \|_{C^3[0,T_0/2]} \le M$ тенгсизликлар бажарилса, $f_{00}(t), k(t)$ ва $\tilde{\mu}(y)$ функцияларни мос равишда $\tilde{Q}(M_1, T)$ ва $Q(M, T_0)$ синфларга тегишли деб ҳисоблаймиз.

Теорема 5. *Фараз қилайлик* $\tilde{\mu}^{(1)}(y),\, \tilde{\mu}^{(2)}(y) \in \mathcal{Q}(M,T)$ *лар (1)-(5) тескари масаланинг* $f_{00}^{(1)},\, k^{(1)} \in \tilde{\mathcal{Q}}(M_1,T)$ *ва* $f_{00}^{(2)},\, k^{(2)} \in \tilde{\mathcal{Q}}(M_1,T)$ *берилганларга мос ечимлари бўлсин.*

У ҳолда қуйидаги турғунлик баҳоси ўринли:

$$\| \tilde{\mu}^{(1)} - \tilde{\mu}^{(2)} \|_{C^3[0,T_0/2]} \le d_2 \Big[\| f_{00}^{(1)} - f_{00}^{(2)} \|_{C^2[0,T]} + \| k^{(1)} - k^{(2)} \|_{C^2[0,T]} \Big],$$

бу ерда d_2 *ўзгармас фақат* $\tilde{\mathcal{Q}}(M_1,T),\, \mathcal{Q}(M,T_0)$ *синфларнинг танланишига боғлиқ.*

Турғунлик теоремасидан етарлича кичик $T_0 > 0$ ларда ечимнинг ягоналиги келиб чиқади.

Теорема 6. $\tilde{\mu}^{(i)}(y) \in C^3[0,T_0/2]$ *ва* $f_{00}^{(i)},\, k^{(i)},\; i=1,2$ *функциялар 5-теорема шартларини қаноатлантирсин. Агар барча* $t \in [0,T]$ *лар учун* $f_{00}^{(1)}(t) = f_{00}^{(2)}(t),\; k^{(1)}(t) = k^{(2)}(t)$ *бўлса, у ҳолда* $y \in [0,T_0/2]$ *кесмада* $\tilde{\mu}^{(1)}(y) \equiv \tilde{\mu}^{(2)}(y)$ *бўлади.*

Диссертациянинг иккинчи боби **«Ёпишқоқ–эластик ғовак муҳитда интегро–дифференциал тенгламалар системаси учун икки ўлчамли ядрони аниқлаш масаласи»** деб номланган бўлиб, вақт ўзгарувчиси бўйича чекли силлиқликка эга ва фазовий ўзгарувчисига нисбатан аналитик бўлган функциялар синфида интеграл ҳаднинг ядросини топиш масаласи ўрганилган. Биринчи параграфда тўғри ва тескари масалаларнинг қўйилиши келтирилган. Ҳақиқий ўзгарувчили аналитик функциялар Банах фазоларининг шкаласи киритилган.

Қуйидаги гиперболик интегро–дифференциал

$$\rho_s \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Sigma_1(x,z,t) + \frac{\partial}{\partial z}\Sigma_2(x,z,t) - \chi\rho_l^2 \frac{\partial}{\partial t}(U-V), \tag{9}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \chi\rho_l (U-V), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,\; z>0 \tag{10}$$

тенгламалар системасидан умумлашган $U(x,z,t),\; V(x,z,t)$ ечимни

$$U\big|_{t<0} = \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t<0} \equiv 0, \quad V\big|_{t<0} \equiv 0, \quad \Sigma_2(x,+0,t) = \varepsilon_0(x)\delta'(t). \tag{11}$$

бошланғич ва чегаравий шартлар асосида топишдан иборат бўлган тўғри масалани қараймиз.

(9)-(10) тенгламалар системаси тешиклари суюқлик билан тўлдирилган ёпишқоқ–эластик ғовак муҳитда товуш тўлқинларининг тарқалишини ифодалайди, бунда $\varepsilon(x)$ берилган силлиқ функция. (9) тенгламадаги $\Sigma_1(x,z,t),\; \Sigma_2(x,z,t)$ кучланишлар $U(x,z,t)$ билан қуйидаги формулалар орқали боғланган:

$$\begin{cases} \Sigma_1(x,z,t) = \mu(z)\dfrac{\partial U}{\partial x} + \displaystyle\int_0^t k(x,t-\tau)\mu(z)\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,z,\tau)\,d\tau, \\ \Sigma_2(x,z,t) = \mu(z)\dfrac{\partial U}{\partial z} + \displaystyle\int_0^t k(x,t-\tau)\mu(z)\dfrac{\partial U}{\partial z}(x,z,\tau)\,d\tau, \end{cases} \tag{12}$$

$k(x,t)$ функция $k(x,0)=k_t(x,0)=0$ шартларни қаноатлантиради деб фараз қиламиз, бундан ташқари $\mu(z)\in\Lambda:=\left\{\mu(z)\in C^3[0,\infty):\ \mu(z)>0,\ \mu'(+0)=0\right\}$ бўлсин. Шунингдек, умумийликка зиён етказмаган ҳолда $\rho_s=\rho_l=\chi=1$ деб ҳисоблаймиз.

$\mu(z),\ k(x,t),\ \varepsilon(x)$ лар берилганда (9)-(11) тенгламалардан U ва V ларни топишга ёпишқоқ-эластик ғовак муҳит учун тўғри масала деб аталади. Тескари масала тўғри масаланинг ечими ҳақидаги

$$U\Big|_{z=0}=-\frac{\varepsilon(x)}{\sqrt{\mu(0)}}\delta(t)+e^{-t/2}\theta(t)\,f(x,t), \tag{13}$$

қўшимча маълумот бўйича $k(x,t)$ функцияни топишдан иборат, бунда $f(x,t)$ - берилган регуляр функция.

(9)-(13) тескари масалани ечишда x ўзгарувчи бўйича аналитик бўлган Банах функциялар фазосини қараймиз. $\mathbf{A}_s,\ s>0$ орқали ҳақиқий ўзгарувчили аналитик $\psi(x),\ x\in\mathbb{R}$ функцияларнинг Банах фазосини ва ундаги нормани эса

$$\|\psi\|_s=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{s^j}{j!}\left|\frac{d^j}{dx^j}\psi(x)\right|_{x=0}<\infty \tag{14}$$

тенглик ёрдамида киритамиз.

Қуйидаги теорема ўринли:

Теорема 7. *Фараз қилайлик* $\mu\in\Lambda$, $\left(\varepsilon(x),\ 1/\varepsilon(x)\right)\in\mathbf{A}_{s_0}$, $f(x,t)\in C_t^2\left(\mathbf{A}_{s_0};[0,T]\right)$, *ҳамда* $f(x,0)=\dfrac{\varepsilon(x)}{2\sqrt{\mu(0)}}$, $\quad f_t(x,0)=\dfrac{\varepsilon(x)}{8\sqrt{\mu(0)}}\left[\mu''(0)-9\right]-\dfrac{\sqrt{\mu(0)}}{2}\varepsilon''(x)$, *тенгликлар ўринли бўлсин.*

У ҳолда шундай $a\in(0,T/2),\ as_0<T/2$ *сон топилиб, ихтиёрий* $s\in(0,s_0)$ *учун (9)-(13) тескари масаланинг ягона ечими мавжуд, ва* $k(x,t)\in C_t^2\left(\mathbf{A}_{s_0};[0,a(s_0-s)]\right)$ *бўлади, бу ерда* $C_t^2\left(\mathbf{A}_{s_0};[0,T]\right)-t$ *ўзгарувчи бўйича икки марта узлуксиз–дифференциалланувчи, қийматлари* $\mathbf{A}_{s_0}$ *да бўлган функциялар синфи.*

Диссертациянинг **«Кучсиз горизонтал бир жинсли бўлмаган ёпишқоқ–эластик ғовак муҳитда икки ўлчамли ядрони аниқлаш масаласи»** деб номланувчи учинчи бобида, гиперболик интегро–дифференциал тенгламалар системаси учун бошланғич-чегаравий масала қаралган. $\mathbb{R}_+^3:=\{(x,z,t)\in\mathbb{R}^3\,|z>0\}$ соҳада (9), (10) тенгламалар системаси қуйидаги бошланғич ва чегаравий шартлар билан тадқиқ қилинган:

$$U\Big|_{t<0}=\frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t<0}\equiv 0,\quad V\Big|_{t<0}\equiv 0,\quad \Sigma_2\Big|_{z=+0}=\delta(x)\delta'(t). \tag{15}$$

$\Sigma_1(x,z,t)$ ва $\Sigma_2(x,z,t)$ функциялар $U(x,z,t)$ билан (12) формулалар орқали боғланган ва $\mu(z)\in\Lambda$.

Тескари масалани қуйидагича қўямиз: (9) тенгламага (12) формула орқали кирган $k(x,t),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}$ функцияни (9)-(11), (15) тўғри масала ечими учун

$$U\big|_{z=0} = f(x,t), \tag{16}$$

қўшимча маълумот берилганда топиш талаб этилсин, бу ерда $f(x,t)$ – берилган функция.

Фараз қилайлик номаълум $k(x,t)$ ядро x ўзгарувчига кучсиз боғлиқ бўлсин, яъни:

$$k(x,t) = k_0(t) + \epsilon x k_1(t) + \dots \tag{17}$$

бу ерда ϵ-кичик параметр. Иккинчи ва учинчи параграфларда k_0 ва k_1 ларни аниқлаш масалалари ўрганилган. Бунинг учун тўғри масала ечими қуйидаги қатор кўринишда ёзилади:

$$U(x,z,t) = U_0(x,z,t) + \epsilon U_1(x,z,t) + ..., \; V(x,z,t) = V_0(x,z,t) + \epsilon V_1(x,z,t) + \dots, \tag{18}$$

ҳамда

$$\Sigma_1(x,z,t) = \Sigma_{10}(x,z,t) + \epsilon \Sigma_{11}(x,z,t) + ..., \quad \Sigma_2(x,z,t) = \Sigma_{20}(x,z,t) + \epsilon \Sigma_{21}(x,z,t) + ...,$$

бу ерда

$$\Sigma_{1n} := \mu(z)[U_{nx}(x,z,t) + \sum_{j=0}^{n} x^j \int_0^t k_j(t-\tau) U_{n-j,x}(x,z,\tau) d\tau],$$

$$\Sigma_{2n} := \mu(z)[U_{nz}(x,z,t) + \sum_{j=0}^{n} x^j \int_0^t k_j(t-\tau) U_{n-j,z}(x,z,\tau) d\tau], \quad n = 0,1,2,\dots.$$

k ва U, V функцияларнинг ϵ бўйича ёйилмалари (9), (10) тенгламаларга қўйилади ва натижада бир хил даражали ϵ лар олдидаги коэффициентларни тенглаштириш натижасида $U_n(x,z,t)$, $V_n(x,z,t)$ функцияларга нисбатан

$$\rho_s \frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(z)\frac{\partial U_n}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\mu(z)\frac{\partial U_n}{\partial z}\Big) + \int_0^t \sum_{j=0}^{n} k_j(t-\tau)[\frac{\partial}{\partial x}(\mu x^j U_{n-j,x}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(\mu x^j U_{n-j,z})] d\tau - \chi \rho_l^2 \frac{\partial}{\partial t}(U_n - V_n), \tag{19}$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} = \chi \rho_l (U_n - V_n), \tag{20}$$

$$U_n\big|_{t<0} = \frac{\partial U_n}{\partial t}\big|_{t<0} \equiv 0, \; V_n\big|_{t<0} \equiv 0, \; \Sigma_{2n}(t,x,+0) = \delta_{n0}\delta(x)\delta'(t), \tag{21}$$

$$U_n\big|_{z=0} = f_n(x,t), \quad n = 0,1,2,\dots. \tag{22}$$

масалалар олинади, бу ерда δ_{n0} Кронекер символи: $\delta_{ij} = 1$, агар $i = j$, $\delta_{ij} = 0$, аксинча.

(19) ва (20) тенгламаларнинг ҳар иккала томонини x^m га кўпайтириб ва натижани x бўйича минус чексизликдан плюс чексизликгача оралиқда интеграллаб, қуйидаги тенгликларга эга бўламиз:

$$\rho_s u_{n,mtt} = \mu m(m-1) u_{n,m-2} + \big(\mu u_{n,mz}\big)_z + \int_0^t \sum_{j=0}^{n} K_j(t-\tau) \big[\mu m(m+j-1) \times$$

$$\times u_{n-j,m+j-2} + \big(\mu u_{(n-j,m+j)z}\big)_z] d\tau - \chi \rho_l^2 \frac{\partial}{\partial t}(u_{n,m} - v_{n,m}), \tag{23}$$

$$v_{n,mt} = \chi\rho_l(u_{n,m} - v_{n,m}). \tag{24}$$

(23), (24) ларда $u_{n,m}, v_{n,m}$ орқали мос равишда U_n, V_n функцияларнинг $m-$моментлари белгиланган:

$$u_{n,m}(z,t) := \int_{-\infty}^{+\infty} x^m U_n(x,z,t)dx, \quad v_{n,m}(z,t) := \int_{-\infty}^{+\infty} x^m V_n(x,z,t)dx.$$

(23) ва (24) тенгламаларни олишда ихтиёрий чекли t лар учун $U_n, V_n, (n = 0,1,2,\ldots)$ функциялар чекли тартибли сингуляр умумлашган ва регуляр функцияларнинг йиғиндиси кўринишда тасвирланиши, ҳамда U_n, V_n ларнинг ташувчиси чегараланганлигидан фойдаланилди. $u_{n,m}, v_{n,m}$ лар қуйидаги бошланғич ва чегаравий шартларни қаноатлантиради:

$$u_{n,m}\big|_{t<0} = \frac{\partial u_{n,m}}{\partial t}\big|_{t<0} \equiv 0, v_{n,m}\big|_{t<0} \equiv 0, \tag{25}$$

$$[u_{n,mz} + \int_0^t \sum_{j=0}^{n} k_j(t-\tau)u_{(n-j,m+j)z}d\tau]_{z=+0} = \frac{\delta_{n0}\delta_{m0}}{\mu(0)}\ \delta'(t). \tag{26}$$

Фараз қилайлик,

$$u_{nn}\big|_{z=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_n(x,t)dx = f_n(t), \tag{27}$$

бўлсин, бу ерда $f_n(t),\ n = 0,1-$берилган етарлича силлиқ функциялар.

Иккинчи параграфда $k_0(t)$ ни аниқлаш масаласини ўрганамиз. Бунинг учун $n = m = 0$ ҳолни қараймиз. У ҳолда (23)-(27) лар ёрдамида k_0 ва u_{00}, v_{00} ларни аниқлаш учун қуйидаги тенгламалар

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_{00}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\mu(z)L\Big[k_0, \frac{\partial u_{00}}{\partial z}\Big]\Big) - \chi\rho_l^2 \frac{\partial}{\partial t}(u_{00} - v_{00}), \tag{28}$$

$$\frac{\partial v_{00}}{\partial t} = \chi\rho_l(u_{00} - v_{00}), \tag{29}$$

бошланғич ва чегаравий

$$u_{00}\big|_{t<0} = \frac{\partial u_{00}}{\partial t}\big|_{t<0} \equiv 0, v_{00}\big|_{t<0} \equiv 0, \quad L\Big[k_0, \frac{\partial u_{00}}{\partial z}\Big]_{z=+0} = \frac{\delta'(t)}{\mu(0)}, \tag{30}$$

$$u_{00}\big|_{z=0} = f_0(t)\left[\equiv -\frac{1}{\sqrt{\rho_s\mu(0)}}\delta(t) + \theta(t)f_{00}(t)\right], \tag{31}$$

шартларни қаноатлантирувчи масалани ҳосил қиламиз, бу ерда

$$L[k,u] = u(z,t) + \int_0^t k(t-\tau)u(z,\tau)d\tau.$$

$k_0(0) = k_0'(0) = 0$ шартлар ўринли деб фараз қиламиз. Бунинг учун

$$f_{00}(0) = \frac{\lambda}{2\sqrt{\rho_s\mu(0)}}, \quad f_{00}'(0) = -\frac{1}{2\sqrt{\rho_s\mu(0)}}\Big[\lambda\chi\rho_l + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{1}{4\rho_s}\Big] \tag{32}$$

шартларнинг бажарилишини талаб этиш етарли ҳисобланади.

(28)-(31) масала 1.2 параграфда ўрганилган масаланинг хусусий ҳоли бўлиб, қуйидаги теорема ўринли:

Теорема 8. *Агар 1-теорема шартларига қўшимча равишда* $\mu \in \Lambda,\ f_{00}(t) \in C^3[0,T]$ *ва (32) шартлар бажарилса, у ҳолда (28)-(31) тескари масаланинг ягона ечими мавжуд ва* $k_0(t) \in C^3[0,T]$ *бўлади.*

Учинчи параграфда $k_1(t)$ ни аниқлаш учун (23)-(27) тескари масалада $n = m = 1$ деб $u_{11}(y,t),\ k_1(t)$ функцияларга нисбатан

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\mu(z)L[k_0, \frac{\partial u_{11}}{\partial z}]\Big) + \int_0^t k_1(t-\tau)[\mu u_{00} + (\mu u_{02z})_z]d\tau - \chi \rho_l^2 \frac{\partial}{\partial t}(u_{11} - v_{11}), \tag{33}$$

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial t} = \chi \rho_l (u_{11} - v_{11}), \tag{34}$$

тенгламалар

$$u_{11}|_{t<0} = \frac{\partial u_{11}}{\partial t}|_{t<0} \equiv 0, \quad v_{11}|_{t<0} \equiv 0, \tag{35}$$

$$\Big[L[k_0, u_{11z}] + \int_0^t k_1(t-\tau)u_{02z}(z,\tau)d\tau\Big]_{z=+0} = 0, \tag{36}$$

$$u_{11}|_{z=0} = f_1(t), \tag{37}$$

бошланғич, чегаравий ва қўшимча шартларни ҳосил қиламиз.

Ушбу масаланинг ечимига нисбатан қуйидаги теорема ўринли:

Теорема 9. *Фараз қилайлик,* $f_1(t) \in C^2[0,T]$ *ва* $f_1(0) = f_1'(0) = 0$ *бўлсин. У ҳолда (33)-(37) масаланинг ихтиёрий фиксирланган* $T > 0$ *лар учун ягона* $k_1(t) \in C[0,T]$ *ечими мавжуд.*

Масала ечимининг шартли турғунлигини характерловчи теоремани келтирамиз. $M(q_0)$ орқали бирор фиксирланган мусбат q_0 сони учун $\| k_1(t) \|_{C[0,T]} \le q_0,\ t \in [0,T]$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $k_1(t) \in C[0,T]$ функциялар тўпламини белгилаймиз.

Теорема 10. $k_1^{(1)}(t) \in M(q_0),\ k_1^{(2)}(t) \in M(q_0)$ *лар (33)-(37) тескари масаланинг* $f_1^{(i)}(t),\ \tilde{\mu}^{(i)}(y),\ i = 1,2$ *қўшимча шартларга мос ечимлари бўлсин. У ҳолда шундай мусбат* $d_3 = d_3(q_0, q_{00}, T)$ *сон топилиб, бу ерда*

$$q_{00} := \max\{\| \tilde{\mu}^{(1)} \|_{C^3[0,T/2]}, \| f_1^{(1)}(t) \|_{C^2[0,T]}, \| \tilde{\mu}^{(2)} \|_{C^3[0,T/2]}, \| f_1^{(2)}(t) \|_{C^2[0,T]}\},$$

қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$\| k_1^{(1)}(t) - k_1^{(2)}(t) \|_{C[0,T]} \le d_3 \Big[\| \tilde{\mu}^{(1)} - \tilde{\mu}^{(2)} \|_{C^3[0,T/2]} + \| f_1^{(1)} - f_1^{(2)} \|_{C^2[0,T]}\Big].$$

Теорема 11. $k_1^{(i)} \in C[0,T]$ *ва* $f_1^{(i)},\ \tilde{\mu}^{(i)}$ *функциялар 10-теореманинг шартларини қаноатлантирсин. У ҳолда, агар барча* $(y,t) \in D_T$ *лар учун* $f_1^{(1)}(t) = f_1^{(2)}(t),\quad \tilde{\mu}^{(1)}(y) = \tilde{\mu}^{(2)}(y)$ *бўлса, ихтиёрий* $t \in [0,T]$ *лар учун* $k_1^{(1)}(t) \equiv k_1^{(2)}(t)$ *бўлади.*

ХУЛОСА

Диссертацияда гиперболик интегро–дифференциал тенгламалар системасининг интеграл ҳади бир ва икки ўзгарувчили бўлган ядросини аниқлаш масалаларининг корректлиги тадқиқ этилди. Вертикал йўналишда бир жинсли бўлмаган ғовак муҳитларда ёпишқоқлик–эластиклик интегро–дифференциал тенгламалар системаси учун тескари масалани иккинчи тур Вольтерра интеграл тенгламалар системасига келтириш методлари олинди.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Вертикал бир жинсли бўлмаган ғовак муҳит учун изотропик ёпишқоқ–эластик тенгламалар системасидан бир ўлчамли хотира ядросини бир қийматли аниқлашнинг глобал ечилиш шартлари олинди.
2. Тескари масала иккинчи тур чизиқли бўлмаган Вольтерра интеграл тенгламалар системасига келтирилган. Ночизиқлилик ўрама характерга эга бўлгани учун қисқартириб акслантириш принципидан фойдаланиб, вазн нормали фазоларда интеграл тенгламаларнинг ягона ечими мавжудлиги исботланди.
3. Тескари масала ечими турғунлик баҳосининг Ламе параметрига ва тўғри масала ечими ҳақида қўшимча шартни ифодаловчи функцияга узлуксиз боғлиқлиги кўрсатилди.
4. Ламе параметри z ўзгарувчининг бирор функцияси бўлган ҳолда ёпишқоқлик–эластиклик тенгламаси учун тескари масаланинг узлуксиз функциялар фазосида локал бир қийматли ечилиш теоремаси исботланди, ҳамда турғунлик баҳоси олинди.
5. Фазовий координата бўйича аналитик ва вақт ўзгарувчиси бўйича силлиқ бўлган хотира ядросини аниқлаш бўйича икки ўлчамли тескари масала тадқиқ қилинди. Локал бир қийматли ечилувчанлик теоремаси исботланди.
6. Икки ўлчамли интегро–дифференциал тенгламалар системаси учун бошланғич ва чегаравий масала ўрганилди. Тескари масалада ядро фазовий ўзгарувчисига кучсиз боғлиқ деб фараз қилиниб, бир ўлчамли масалалар олинди. Глобал бир қийматли ечилувчанлик теоремалари исботланди ва турғунлик баҳолари қурилди.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.55.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ УРГЕНЧСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

РАХМОНОВ АСКАР АХМАДОВИЧ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

01.01.02–Дифференциальные уравнения и математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

БУХАРА–2020

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2020.2.PhD/FM221.

Диссертация выполнена в Бухарском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-mat.urdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Зикиров Обиджан Салижанович** доктор физико-математических наук, профессор
	Яхшимуратов Алишер Бекчанович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» _____________2020 года в ____ часов на онлайн заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 при Ургенчском государственном университете (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел.: (+99862) 224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00, e-mail: ik_mat.urdu@umail.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ургенчского государственного университета (зарегистрирована за №_________). (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х.Алимджана, дом 14. Тел.: (+99862) 224-66-11, факс: (99862) 224-67-00).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2020 года.
(протокол рассылки № 2 от «4» мая 2020 года).

Б.И. Абдуллаев
Председатель Научного совета по присуждению ученой степени, д.ф.-м.н.

А.А. Атамуратов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученой степени, к.ф.-м.н.

С.А. Имомкулов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени, д.ф.-м.н.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые в мировом масштабе, показывают актуальность исследования обратных задач для интегро–дифференциальных уравнений или систем уравнений. Математическое моделирование некоторых процессов в естественных науках для так называемых систем с памятью, поведения которых зависят от всей предыстории процесса, описывается интегро-дифференциальными уравнениями. Среда, в которой происходят такие процессы, называется средой с "последействием" или с "памятью". Задачи определения ядер интегрального члена интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа – относительно новое направление в теории обратных задач, возникшее в конце 80-х годов двадцатого века. Так как методы решения таких задач не сформированы в нужной степени, развитие исследований в данном направлении является актуальным.

В мировых научных исследованных на данный момент особое внимание уделяется вопросам изучения обратных задач для процессов с памятью. В математическом плане учет предыстории приводит к необходимости введения в рассматриваемую математическую модель упругости дополнительного интегрального слагаемого типа оператора свертки с ядром, отвечающим за предысторию или память среды. Таким образом, мы приходим к необходимости рассмотрения некоторых обратных задач, связанных с интегро–дифференциальными уравнениями. В приложениях важны задачи с дельтаобразными источниками, сосредоточенными в окрестности фиксированной точки или на границе области. Именно такие актуальные научные проблемы и исследуются в этой диссертационной работе.

В нашей стране особое внимание было уделено актуальным направлениям математической физики, которые имеют научное и практическое применение в фундаментальных науках. Изучение начально-краевых задач для интегро–дифференциальных уравнений, описывающих распространение волн в вязкоупругой пористой среде и исследование обратных задач для них являются актуальной задачей. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов в области дифференциальных уравнений и математической физики выделено как основная задача фундаментальных исследований[2]. Построение методов решения обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений математической физики имеет важное значение в обеспечении исполнения данного постановления.

[2] Постановление №292 Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года “Об организации деятельности научно-исследовательских заведений Академии наук”

В частности, сегодняшний день большое внимание руководством нашего государства уделяется развитию математики, как основе всех точных наук. Исследования данной диссертации в определенной степени служат осуществлению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института математики имени В.И. Романовского академии наук республики Узбекистан», а также № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно - правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий в республике. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Обратные задачи для гиперболических уравнений относятся к некорректным задачам математической физики. Первые постановки динамических обратных задач для гиперболических уравнений и систем были сформулированы и исследованы М.М.Лаврентьевым, В.Г.Романовым, А.С.Благовещенским, А.С.Алексеевым, К.В.Винклером и Д.Л.Джонсоном. Различные подходы и методы исследования обратных динамических задач для гиперболических уравнений и систем предложены и развиты в работах В.Г.Романова, А.С.Благовещенского, Я.Янно, А.Лоренци, А.Л.Бухгейма, Д.К.Дурдиева, Х.Х.Имомназарова и др. Из перечисленных выше работ отметим работы В.Г. Романова, А.С. Благовещенского, А. Лоренци, Д.К. Дурдиева и Х.Х. Имомназарова, которые в своей постановке наиболее близки к диссертационной работе.

При исследовании нестационарных процессов в пористых средах с учетом структуры пористой среды часто используются теории типа Био [М.А. Биот]. Впрочем, корректно проведенных сравнений теоретических исследований, основанных на теории Био, с экспериментальными результатами на природных образцах относительно мало. В прикладных задачах теории распространения упругих волн часто возникает потребность учесть пористость, флюид насыщенность среды и гидродинамический фон. В основываясь на теорию Био, В.Н. Доровский построил нелинейную математическую модель фильтрации жидкости в пористой упругой деформируемой среде. В основу модели положены три основных принципа: выполнение законов сохранения, принцип относительности Галилея, согласованность уравнений движения с термодинамическими условиями равновесия.

В работах А.Э. Холмуродова изучены прямые и обратные задачи для вышеописанной линеаризованной модели Доровского динамических процессов распространения SH (поперечных) волн в упругой пористой среде, а также построены сингулярные решения уравнения SH волн в упруго-пористой средах, полученна система нелинейных вольтерровых интегральных уравнений второго рода для динамических обратных задач для уравнения SH волн в упруго-пористых средах, разработан численный метод и создана программа для численного решения прямой и обратных задач для распространения SH волн в упруго-пористых средах. В настоящее время эта тематика является предметом научных интересов многих математиков.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами института, в котором выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно- исследовательских работ Ф-4-02 «Термодинамика моделей математической физики с бесконечным множеством состояний» (2017-2020) Бухарского государственного университета.

Цель исследования. Основной целью настоящей диссертационной работы является построение методов решений одномерных и двумерных обратных динамических задач для системы интегро–дифференциальных уравнений в вязкоупругой пористой среде, а также исследование единственности, устойчивости и существования решений этих обратных задач.

Задачи исследования:

исследование глобальной однозначной разрешимости и устойчивости задачи определения одномерного ядра для системы уравнений изотропной вязкоупругости в вертикально-неоднородной пористой среде;

доказательство теоремы единственности и в «малом» теоремы существования решения рассмотренных обратных задач, а также непрерывной зависимости решений обратных динамических задач от входных данных;

исследование локальной однозначной разрешимости задачи определения двумерного ядра, аналитического по пространственной переменной и гладкого по временной переменной, для системы уравнений изотропной вязкоупругости в пористой среде;

исследование динамической обратной задачи для уравнения вязкоупругости в пористой среде со слабо горизонтальной неоднородностью в полупространстве $z > 0$.

Объектом исследования: являются одномерные и двумерные обратные задачи для системы интегро–дифференциальных уравнений гиперболического типа второго порядка.

Предметом исследования: являются одномерные и двумерные прямые и обратные задачи для системы гиперболических интегро–дифференциальных уравнений второго порядка типа свёртки и система уравнений вязкоупругости.

Методы исследования: в диссертации использованы методы теории дифференциальных уравнений с частными производными и теории интегральных уравнений, а также методы функционального анализа. Однозначная разрешимость прямых и обратных задач доказана заменой задач замкнутой системой нелинейных интегральных уравнений второго рода Вольтеровского типа и дальнейшим применением метода последовательных приближений и принципа сжимающих отображений. Доказательство теорем однозначной разрешимости в классе функций аналитических по пространственным и гладких по временной переменным проведено на основе метода шкал Банаховых пространств аналитических функций.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказаны, что существует единственное глобальное решение обратной задачи, и получены оценки его устойчивости;

поставлена и решена одномерная обратная задача об определении параметров Ламе для системы уравнений вязкоупругости. Доказана теорема единственности и существования в «малом» решений рассмотренных обратных задач, а также непрерывной зависимости решений обратных динамических задач от входных данных;

методом шкал банаховых пространств аналитических функций доказана теорема локальной разрешимости обратной задачи в классе функций, аналитических по пространственной переменной и непрерывных по временной;

исследована обратная задача определения двумерного ядра в вязкоупругой пористой среде со слабо горизонтальной неоднородностью. Доказаны теоремы глобальной и локальной разрешимости этих задач.

Практические результаты исследования. Результаты исследований могут быть использованы в сейсмологии, при разработке нефтяных и газовых месторождений и при чтении специальных курсов лекций по предмету математической физики для старших курсов бакалавриатуры и магистратуры.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов математического анализа, дифференциальных уравнений, математической физики, функционального анализа, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Материал диссертационной работы, будучи в первую очередь теоретическим исследованием, является основой для формулировки конкретных вычислительных алгоритмов и решения актуальных практических задач, связанных с прикладной геофизикой, в частности, с сейсмической разведкой.

Полученные результаты могут быть также использованы в дальнейших исследованиях по теории обратных и некорректных задач для уравнений математической физики.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов по обратным задачам в вязкоупругой пористой среде для системы интегро–дифференциальных уравнений:

исследовании разрешимости обратных задач в вязкоупругости в проекте ОТ-Ф4-69 «Гармонический анализ, степеней геометрии и его приложения к задачам математической физики» используется при исследовании обратных задач, поставленных для системы интегро–дифференциальных уравнений. (Справка Министерства высшего и среднего-специального образования республики Узбекистан от 8 июля 2020 года). Применение научных результатов позволило доказать существование и единственность задачи определения обобщенной функции на сфере.

-исследовании разрешимости обратных задач вязкоупругости для пористой среды в проекте «Математическое моделирование и численное решение задач механики сплошной среды и тепломассообмена в геофизических и инженерных задачах» регистрационный номер АААА-А19-119032590069-3 (Справка Южного Математического Института филиала ФГНБУ ФНЦ “Владикавказский научный центр РАН, от 27.07.2020 г.). Фундаментальные результаты исследований дали возможность разработать численный алгоритм по определению основных характеристик вязкоупругой пористой среды.

Апробации результатов исследования. Результаты данного исследования обсуждены на 5 научно-практических конференциях, в том числе на 2 международных и 3 республиканских.

Опубликование результатов. По теме диссертации опубликовано 12 научных работ, из них 7 статей входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 3 опубликованы в зарубежных журналах входящих в базу SCOPUS и 4 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации 106 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава диссертации называется **«Одномерные обратные задачи для системы интегро–дифференциальных уравнений в вязкоупругой пористой среде»**. В первом параграфе этой главы, приводятся основные понятия, а также известные теоремы, которые используются при доказательствах результатов диссертации. Во втором параграфе рассматривается начально-краевая задача для системы интегро–дифференциальных уравнений SH (поперечной)-волн в вязкоупругой пористой среде, состоящая в нахождении обобщенного решения $U(z,t),\ V(z,t)$ из следующих уравнений

$$\rho_s \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\Sigma(z,t) - \chi\rho_l^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(U - V\right), \quad t \in \mathbb{R},\ z > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \chi\rho_l\left(U - V\right), \quad t \in \mathbb{R},\ z > 0, \tag{2}$$

с начальным и граничным условиями

$$U\big|_{t<0} = \frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t<0} \equiv 0, \quad V\big|_{t<0} \equiv 0, \quad \Sigma(+0,t) = \delta'(t). \tag{3}$$

Здесь $U(z,t)$ скорость упругого пористого тела с постоянной парциальной плотностью ρ_s и $V(z,t)$ скорость жидкости с постоянной плотностью ρ_l, $\chi -$коэффициент трения между компонентами, которые всюду в настоящей диссертации полагаются постоянными и положительными, $\delta'(t) -$производная дельта-функции Дирака. Напряжение $\Sigma(z,t)$ связано с $U(z,t)$ формулой

$$\Sigma(z,t) = \mu(z)\frac{\partial U}{\partial z} + \int_0^t k(t-\tau)\mu(z)\frac{\partial U}{\partial z}(z,\tau)d\tau, \tag{4}$$

где $\mu(z)$ есть параметр Ламе, $k(t) -$функция, характеризующая вязкость среды. В обратной задаче требуется найти ядро $k(t),\ t > 0$, входящее в уравнение (1) посредством формулы (4), если о решении прямой задачи известно следующее

$$U\,|_{z=0} = f(t), \tag{5}$$

где $f(t)$-заданная функция.

Пусть

$$y = \int_0^z \frac{d\xi}{c(\xi)}, \quad c(z) := \sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho_s}}. \tag{6}$$

Обозначим через $l(y)$ функцию, определяющую соответствие между y и z, т.е. $z = l(y)$. Введем также обозначения

$$\frac{\chi\rho_l^2}{\rho_s} = \lambda, \quad \tilde{\mu}(y) = \mu(l(y)). \tag{7}$$

Рассмотрим задачу (1)-(5) в области $D_T = \{(y,t) : 0 \le y \le t \le T - y\}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) функция $f(t)$ *представима в виде:* $f(t) = -\frac{1}{\sqrt{\rho_s \tilde{\mu}(0)}} \delta(t) + \theta(t) f_{00}(t),$ *где* $f_{00}(t) \in C^2[0,T]$ *– заданная функция и* $\theta(t)$ *– функция Хэвисайда:* $\delta(t) = \left(d/dt \right) \theta(t)$ *; 2)* $\tilde{\mu}(y) \in C^3[0,T/2].$

Тогда существует единственное решение $k(t) \in C^2[0,T]$ *обратной задачи (1)-(5) для любого фиксированного* $T > 0$.

Обозначим через $M(h_0)$ множество функций $k(t) \in C^2[0,T]$, удовлетворяющих для $t \in [0,T]$ неравенству $\| k(t) \|_{C^2[0,T]} \leq h_0$ с фиксированной положительной постоянной h_0.

Теорема 2. *Пусть* $k^{(1)}(t) \in M(h_0)$ *и* $k^{(2)}(t) \in M(h_0)$ *два решения обратной задачи (1)-(5) с данными* $\left(\tilde{\mu}^{(1)}, f_{00}^{(1)} \right)$ *и* $\left(\tilde{\mu}^{(2)}, f_{00}^{(2)} \right)$*, соответственно. Тогда найдется такое положительное число* $d_1 = d_1(h_0, h_{00}, T),$

$$h_{00} = \max \left\{ \| \tilde{\mu}^{(1)}(y) \|_{C^3[0,T/2]}, \| f_{00}^{(1)}(t) \|_{C^2[0,T]}, \| \tilde{\mu}^{(2)}(y) \|_{C^3[0,T/2]}, \| f_{00}^{(2)}(t) \|_{C^2[0,T]} \right\},$$

что имеет место оценка

$$\| k^{(1)}(t) - k^{(2)}(t) \|_{C^2[0,T]} \leq d_1 \left[\| \tilde{\mu}^{(1)} - \tilde{\mu}^{(2)} \|_{C^3[0,T/2]} + \| f_{00}^{(1)} - f_{00}^{(2)} \|_{C^2[0,T]} \right].$$

Следующая теорема единственности является следствием теоремы устойчивости.

Теорема 3. *Пусть функции* $k^{(i)} \in C^2[0,T]$ *и* $\tilde{\mu}^{(i)}, f_{00}^{(i)}, i = 1,2$ *имеют тот же смысл, что и в теореме 2. Если при этом* $\tilde{\mu}^{(1)}(y) = \tilde{\mu}^{(2)}(y),\ f_{00}^{(1)}(t) = f_{00}^{(2)}(t)$ *для* $(y,t) \in D_T$*, то* $k^{(1)}(t) \equiv k^{(2)}(t)$ *на отрезке* $[0,T]$.

В параграфе 1.3 изучена следующая обратная задача: требуется по дополнительной информации (5), найти $\mu(z)$ из (1)-(4) (при этом $k(t)$ считается известной).

Теорема 4. *Пусть* $T > 0$ *фиксированное число, а функция* $f(t)$ *представима как в теореме 1 и* $k(t) \in C^2[0,T]$*. Тогда при достаточно малых* $T_0 \in (0,T]$ *существует единственное решение обратной задачи определения* $\tilde{\mu}(y)$ *из соотношений (1)-(5), такое, что* $\tilde{\mu}(y) \in C^3\left[0, T_0/2\right]$.

Приведем еще теорему, характеризующую оценку условной устойчивости решения (1)-(5) обратной задачи. Такую оценку можно получить, задавшись, определенным классом данных $\tilde{\mathcal{Q}}_0(M_1, \tilde{\mu}(0), \tilde{\mu}'(0), k(0), f_{00}(0), \lambda, T) := \tilde{\mathcal{Q}}(M_1, T)$ для функций $f_{00}(t), k(t)$ и классом $\mathcal{Q}_0(M, \tilde{\mu}(0), \tilde{\mu}'(0), k(0), f_{00}(0), \lambda, T_0) := \mathcal{Q}(M, T_0)$ для функций $\tilde{\mu}(y)$. Будем говорить, $f_{00}(t), k(t)$ принадлежат классу $\tilde{\mathcal{Q}}(M_1, T)$ и $\tilde{\mu} \in \mathcal{Q}(M, T_0)$, если они удовлетворяют неравенствам $\| f_{00} \|_{C^2[0,T]} \leq M_1,\ \| k \|_{C^2[0,T]} \leq M_1,$ $\| \tilde{\mu} \|_{C^3[0,T_0/2]} \leq M.$

Теорема 5. *Пусть* $\tilde{\mu}^{(1)}(y),\ \tilde{\mu}^{(2)}(y) \in \mathcal{Q}(M, T_0)$ *два решения обратной задачи (1)-(5) с наборами данных* $f_{00}^{(1)},\ k^{(1)} \in \tilde{\mathcal{Q}}(M_1, T)$ *и* $f_{00}^{(2)},\ k^{(2)} \in \tilde{\mathcal{Q}}(M_1, T)$ *соответственно.*

Тогда имеет место оценка устойчивости

$$\| \tilde{\mu}^{(1)} - \tilde{\mu}^{(2)} \|_{C^3[0,T/2]} \le d_2 \left[\| f_{00}^{(1)} - f_{00}^{(2)} \|_{C^2[0,T]} + \| k^{(1)} - k^{(2)} \|_{C^2[0,T]} \right],$$

причем константа d_2 *зависит только от выбора классов* $\tilde{\mathcal{Q}}(M_1,T), \mathcal{Q}(M,T)$.

Из теоремы устойчивости следует справедливость теоремы единственности для достаточно малого фиксированного положительного T_0.

Теорема 6. *Пусть функции* $\tilde{\mu}^{(i)}(y) \in C^3[0,T_0/2]$ *и* $f_{00}^{(i)},\ k^{(i)},\ i = 1,2$ *имеют тот же смысл, что и в теореме 5. Если при этом* $f_{00}^{(1)}(t) = f_{00}^{(2)}(t),\ k^{(1)}(t) = k^{(2)}(t)$ *для* $t \in [0,T]$, *то* $\tilde{\mu}^{(1)}(y) \equiv \tilde{\mu}^{(2)}(y)$ *на отрезке* $[0, T_0/2]$.

Во второй главе диссертации, названной **«Задача об определении двухмерного ядра в вязкоупругой пористой среде, аналитического по пространственной переменной»**, изучена задача определения двумерного ядра в классе функций, обладающих конечной гладкостью по временной переменной и аналитических по пространственной переменной. В первом параграфе приводится постановка прямой и обратной задачи. Вводится шкала банаховых пространств аналитических функций вещественного переменного.

Рассматривается система интегро–дифференциальных гиперболических уравнений

$$\rho_s \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Sigma_1(x,z,t) + \frac{\partial}{\partial z}\Sigma_2(x,z,t) - \chi\rho_l^2 \frac{\partial}{\partial t}(U - V), \tag{9}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \chi\rho_l (U - V),\ \ (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ z > 0 \tag{10}$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$U\big|_{t<0} = \frac{\partial U}{\partial t}\big|_{t<0} \equiv 0,\ V\big|_{t<0} \equiv 0,\ \Sigma_2(x,+0,t) = \varepsilon(x)\delta'(t). \tag{11}$$

Система уравнений (9), (10) описывает распространение звуковых волн в вязкоупругой пористой среде, состоящей из упругого пористого тела, поры которого заполнены жидкостью. Здесь функция $U(x,z,t)$ имеет физический смысл $y-$компонента вектора смещений частиц упругого пористого тела с постоянной парциальной плотностью ρ_s, а $V(x,z,t)-$такой компонент вектора смещений частиц жидкости с постоянной плотностью ρ_l, $\varepsilon(x)-$заданная гладкая функция. В равенствах (9) и (10) напряжения $\Sigma_1(x,z,t)$ и $\Sigma_2(x,z,t)$ связаны с $U(x,z,t)$ формулами

$$\begin{cases} \Sigma_1(x,z,t) = \mu(z)\dfrac{\partial U}{\partial x} + \displaystyle\int_0^t k(x,t-\tau)\mu(z)\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,z,\tau)d\tau, \\ \Sigma_2(x,z,t) = \mu(z)\dfrac{\partial U}{\partial z} + \displaystyle\int_0^t k(x,t-\tau)\mu(z)\dfrac{\partial U}{\partial z}(x,z,\tau)d\tau, \end{cases} \tag{12}$$

где $k(x,t)$ – функция, характеризующая вязкость среды, а $\mu(z)$ – параметр Ламе. Предполагается, что функция $k(x,t)$ удовлетворяет условиям, которые не влияют на суть исследования и облегчают громоздкие выкладки: $k(x,0)=k_t(x,0)=0,$ и $\mu(z)\in\Lambda:=\left\{\mu(z)\in C^3[0,\infty):\mu(z)>0;\ \mu'(+0)=0\right\}.$ Кроме того, всюду в этой главе для простоты положены $\rho_s=\rho_l=\chi=1.$

Задача определения U и V из уравнений (9), (10) при известных функциях $\mu(z),k(x,t),\varepsilon(x)$ называется прямой задачей для вязкоупругой пористой среды. В обратной задаче требуется определить ядро $k(x,t),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}$, входящее в уравнение (9) посредством формул (12), если относительно решения прямой задачи известна информация:

$$U\big|_{z=0}=-\frac{\varepsilon(x)}{\sqrt{\mu(0)}}\delta(t)+e^{-t/2}\theta(t)f(x,t), \tag{13}$$

где $f(x,t)$ – заданная регулярная функция.

Для решения обратной задачи (9)-(13) используется метод шкал банаховых пространств аналитических по переменной x функций. Пространством $\mathbf{A}_s,\ s>0$ (s – параметром шкалы) аналитических функций действительного переменного называется множество функций $\psi(x),\ x\in\mathbb{R}$, аналитических в окрестности начала координат, для которых конечна норма

$$\|\psi\|_s=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{s^j}{j!}\left|\frac{d^j}{dx^j}\psi(x)\right|_{x=0}<\infty. \tag{14}$$

Доказывается теорема однозначной разрешимости обратной задачи.

Теорема 7. *Пусть* $f(x,0)=\dfrac{\varepsilon(x)}{2\sqrt{\mu(0)}},\ f_t(x,0)=\dfrac{\varepsilon(x)}{8\sqrt{\mu(0)}}\left[\mu''(0)-9\right]-\dfrac{\sqrt{\mu(0)}}{2}\varepsilon''(x),$ $\mu\in\Lambda,$ *функции* $\varepsilon(x),\ 1/\varepsilon(x)$ *принадлежат* $\mathbf{A}_{s_0}$. *Кроме того,* $f(x,t)\in C_t^2\left(\mathbf{A}_{s_0};[0,T]\right).$

Тогда найдётся такое $a\in(0,T/2),\ as_0<T/2,$ *что для любого* $s\in(0,s_0)$ *существует единственное решение обратной задачи (9)-(13) такое, что*

$$k(x,t)\in C_t^2\left(\mathbf{A}_{s_0};[0,a(s_0-s)]\right),$$

где $C_t^2\left(\mathbf{A}_{s_0};[0,T]\right)$ *обозначим класс функций, непрерывно – дифференцируемых 2 раз по переменной* t, *со значениями в* $\mathbf{A}_{s_0}$.

Третья глава диссертации называется **«Задача об определении двумерного ядра в вязкоупругой пористой среде со слабо горизонтальной неоднородностью»**. В этой главе рассматривается начально-краевая задача для системы интегро–дифференциальных уравнений гиперболического типа (9), (10). В первом параграфе выполняются предварительные построения. Рассматриваем систему уравнений (9) и (10) в области $\mathbb{R}_+^3:=\{(x,z,t)\in\mathbb{R}^3\mid z>0\}$ с начальным и граничным условиями

$$U\Big|_{t<0}=\frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t<0}\equiv 0,\quad V\Big|_{t<0}\equiv 0,\quad \Sigma_2\Big|_{z=+0}=\delta(x)\delta'(t). \tag{15}$$

Напряжения $\Sigma_1(x,z,t)$ и $\Sigma_2(x,z,t)$ связано с $U(x,z,t)$ формулой (12), $\mu(z)\in\Lambda$.

Требуется определить ядро $k(x,t),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}$, входящее в уравнение (9) посредством формулы (12), если относительно решения прямой задачи известна информация

$$U\Big|_{z=0}=f(x,t), \tag{16}$$

$f(x,t)-$заданная функция.

Пусть ядро $k(x,t)$, входящее в уравнение (9), слабо зависит от горизонтальной переменной x:

$$k(x,t)=k_0(t)+\epsilon\, x k_1(t)+\ldots \tag{17}$$

где $\epsilon-$малый параметр. Во втором и третьем параграфах построен метод отыскания k_0 и k_1. Решение прямой задачи (9), (10), (15) ищем в виде ряда по степеням ϵ:

$$U(x,z,t)=U_0(x,z,t)+\epsilon U_1(x,z,t)+...,\ V(x,z,t)=V_0(x,z,t)+\epsilon V_1(x,z,t)+\ldots, \tag{18}$$

кроме того

$$\Sigma_1(x,z,t)=\Sigma_{10}(x,z,t)+\epsilon\Sigma_{11}(x,z,t)+...,\ \Sigma_2(x,z,t)=\Sigma_{20}(x,z,t)+\epsilon\Sigma_{21}(x,z,t)+...,$$

где

$$\Sigma_{1n}:=\mu(z)[U_{nx}(x,z,t)+\sum_{j=0}^{n}x^j\int_0^t k_j(t-\tau)U_{n-j,x}(x,z,\tau)d\tau],$$

$$\Sigma_{2n}:=\mu(z)[U_{nz}(x,z,t)+\sum_{j=0}^{n}x^j\int_0^t k_j(t-\tau)U_{n-j,z}(x,z,\tau)d\tau],\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Подставляя в (9), (10) разложения для $U,\ V,\ k$ по степеням ϵ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ, с помощью стандартных вычислений, вводятся дифференциальные уравнения для функций $U_n(x,z,t),\ V_n(x,z,t)$:

$$\rho_s\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(z)\frac{\partial U_n}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\mu(z)\frac{\partial U_n}{\partial z}\Big)+\int_0^t\sum_{j=0}^{n}k_j(t-\tau)[\frac{\partial}{\partial x}(\mu x^j U_{n-j,x})+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}(\mu x^j U_{n-j,z})]d\tau-\chi\rho_l^2\frac{\partial}{\partial t}(U_n-V_n), \tag{19}$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial t}=\chi\rho_l(U_n-V_n), \tag{20}$$

$$U_n\Big|_{t<0}=\frac{\partial U_n}{\partial t}\Big|_{t<0}\equiv 0, V_n\Big|_{t<0}\equiv 0, \Sigma_{2n}(t,x,+0)=\delta_{n0}\delta(x)\delta'(t), \tag{21}$$

$$U_n\Big|_{z=0}=f_n(x,t),\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{22}$$

где $\delta_{n0}-$символ Кронекера: $\delta_{ij}=1,$ если $i=j$, $\delta_{ij}=0,$ если $i\neq j$. Умножая обе части уравнений (19), (20) на x^m и интегрируя по x в пределах от минус до плюс бесконечности, получаем

$$\rho_s u_{n,mtt} = \mu m(m-1)u_{n,m-2} + \left(\mu u_{n,mz}\right)_z + \int_0^t \sum_{j=0}^{n} K_j(t-\tau)\left[\mu m(m+j-1)\times\right.$$

$$\left.\times u_{n-j,m+j-2} + \left(\mu u_{(n-j,m+j)z}\right)_z\right]d\tau - \chi\rho_l^2(u_{(n,m)t} - v_{(n,m)t}), \qquad (23)$$

$$v_{n,mt} = \chi\rho_l(u_{n,m} - v_{n,m}). \qquad (24)$$

В уравнениях (23), (24) через $u_{n,m}, v_{n,m}$ обозначены $m-$й моменты функций U_n, V_n:

$$u_{n,m}(z,t) := \int_{-\infty}^{+\infty} x^m U_n(x,z,t)dx, \quad v_{n,m}(z,t) := \int_{-\infty}^{+\infty} x^m V_n(x,z,t)dx.$$

При получении (23), (24) использован тот факт, что при любом конечном t, каждая функция $U_n,\, V_n,\, (n = 0,1,2,\ldots)$ представляет собой сумму некоторой сингулярной обобщенной функции конечного порядка и регулярной функции, причем носители $U_n,\, V_n$ ограничены. $u_{n,m}, v_{n,m}$ удовлетворяют условиям

$$u_{n,m}\big|_{t<0} = \frac{\partial u_{n,m}}{\partial t}\big|_{t<0} \equiv 0, v_{n,m}\big|_{t<0} \equiv 0, \qquad (25)$$

$$[u_{n,mz} + \int_0^t \sum_{j=0}^{n} k_j(t-\tau)u_{(n-j,m+j)z}d\tau]_{z=+0} = \frac{\delta_{n0}\delta_{m0}}{\mu(0)}\delta'(t). \qquad (26)$$

Пусть

$$u_{nn}\big|_{z=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_n(x,t)dx = f_n(t), \qquad (27)$$

где $f_n(t),\; n = 0,1-$заданные достаточно гладкие функции.

Во втором параграфе решается обратная задача определения функции k_0. Положим $n = m = 0$. Тогда (23)-(27) приводят к задаче определения функций k_0 и u_{00}, v_{00} из следующих равенств:

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_{00}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu(z)L\left[k_0, \frac{\partial u_{00}}{\partial z}\right]\right) - \chi\rho_l^2 \frac{\partial}{\partial t}(u_{00} - v_{00}), \qquad (28)$$

$$\frac{\partial v_{00}}{\partial t} = \chi\rho_l(u_{00} - v_{00}), \qquad (29)$$

с начальным и граничным условиями

$$u_{00}\big|_{t<0} = \frac{\partial u_{00}}{\partial t}\big|_{t<0} \equiv 0, v_{00}\big|_{t<0} \equiv 0, \quad L\left[k_0, \frac{\partial u_{00}}{\partial z}\right]_{z=+0} = \frac{\delta'(t)}{\mu(0)}, \qquad (30)$$

$$u_{00}\big|_{z=0} = f_0(t)\left[\equiv -\frac{1}{\sqrt{\rho_s \mu(0)}}\delta(t) + \theta(t)f_{00}(t)\right]. \qquad (31)$$

где

$$L[k,u] = u(z,t) + \int_0^t k(t-\tau)u(z,\tau)d\tau.$$

В дальнейшем, будем считать $k_0(0) = k_0'(0) = 0$. Эти ограничения не являются существенными, но намного упрощают громоздкие формулы и для этого достаточно положить

$$f_{00}(0)=\frac{\lambda}{2\sqrt{\rho_s\mu(0)}},\ f_{00}'(0)=-\frac{1}{2\sqrt{\rho_s\mu(0)}}\Big[\lambda\chi\rho_l+\frac{\lambda^2}{4}-\frac{1}{4\rho_s}\Big]. \qquad (32)$$

Эта задача является частным случаем задачи, рассмотренной в главе I, и для нее справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Если в условиях теоремы 1 дополнительно требовать* $\mu\in\Lambda,\ f_{00}(t)\in C^3[0,T]$ *и (32), то решение обратной задачи* ***(28)-(31)*** *принадлежит следующему классу:* $k_0(t)\in C^3[0,T]$.

В третьем параграфе определяется k_1. В целом, учитывая дополнительное условие (27) при $n=1$ и прямую задачу (23)-(26) при $n=m=1$, сформулируем основную задачу определения пару функций $u_{11}(y,t),\ k_1(t)$ из следующих равенств:

$$\rho_s\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial z}\Big(\mu(z)L[k_0,\frac{\partial u_{11}}{\partial z}]\Big)+\int_0^t k_1(t-\tau)[\mu u_{00}+(\mu u_{02z})_z]d\tau-\chi\rho_l^2\frac{\partial}{\partial t}(u_{11}-v_{11}), \qquad (33)$$

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial t}=\chi\rho_l(u_{11}-v_{11}), \qquad (34)$$

с начальным и граничным условиями

$$u_{11}|_{t<0}=\frac{\partial u_{11}}{\partial t}|_{t<0}\equiv 0,\quad v_{11}|_{t<0}\equiv 0, \qquad (35)$$

$$\Big[L[k_0,u_{11z}]+\int_0^t k_1(t-\tau)u_{02z}(z,\tau)d\tau\Big]_{z=+0}=0, \qquad (36)$$

$$u_{11}|_{z=0}=f_1(t). \qquad (37)$$

Относительно решения этой задачи справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть* $f_1(t)\in C^2[0,T]$ *и* $f_1(0)=f_1'(0)=0$. *Тогда для любого фиксированного* $T>0$ *обратная задача (33)-(37) имеет единственное решение* $k_1(t)\in C[0,T]$.

Приведем еще теорему, характеризующую оценку условной устойчивости решения обратной задачи. Рассмотрим множество $M(q_0)$ функций $k_1(t)\in C[0,T]$, удовлетворяющих для $t\in[0,T]$ неравенству $\|k_1(t)\|_{C[0,T]}\le q_0$ с фиксированной положительной постоянной q_0.

Теорема 10. *Пусть* $k_1^{(1)}(t)\in M(q_0),\ k_1^{(2)}(t)\in M(q_0)$ *решения обратной задачи (33)-(37) с набором данных* $f_1^{(i)}(t),\ \tilde{\mu}^{(i)}(y),\ i=1,2$ *соответственно. Тогда найдётся такое положительное число* $d_3=d_3(q_0,q_{00},T)$,

$$q_{00}:=\max\{\|\tilde{\mu}^{(1)}(y)\|_{C^3[0,T/2]},\|f_1^{(1)}(t)\|_{C^2[0,T]},\|\tilde{\mu}^{(2)}(y)\|_{C^3[0,T/2]},\|f_1^{(2)}(t)\|_{C^2[0,T]}\},$$

что справедлива оценка устойчивости

$$\|k_1^{(1)}(t)-k_1^{(2)}(t)\|_{C[0,T]}\le d_3\Big[\|\tilde{\mu}^{(1)}-\tilde{\mu}^{(2)}\|_{C^3[0,T/2]}+\|f_1^{(1)}-f_1^{(2)}\|_{C^2[0,T]}\Big].$$

Теорема 12. *Пусть функции* $k_1^{(i)}\in C[0,T]$ *и* $f_1^{(i)},\ \tilde{\mu}^{(i)},\ i=1,2$, *имеют тот же смысл, что и в теорема 10. Если при этом* $f_1^{(1)}(t)=f_1^{(2)}(t),\ \tilde{\mu}^{(1)}(y)=\tilde{\mu}^{(2)}(y)$ *для* $(y,t)\in D_T$, *то* $k_1^{(1)}(t)\equiv k_1^{(2)}(t)$ *на отрезке* $[0,T]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследованы вопросы корректности одномерных и двумерных динамических обратных задач определения ядра интегрального члена в системе интегро–дифференциальных уравнений гиперболического типа. Получены методы, с помощью которых обратная задача для интегро–дифференциальных уравнений сводится к решению системы интегральных уравнений второго порядка вольтеровского типа. Рассмотрены обратные задачи для широкого класса гиперболических интегро–дифференциальных уравнений с интегральным оператором в правой части типа свертки.

1. Получены условия однозначной глобальной разрешимости одномерной задачи определения ядра памяти для системы уравнений изотропной вязкоупругости для вертикально-неоднородной пористой среды.
2. В процессе решения обратной задачи выводится система нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Нелинейность носит сверточный характер, поэтому в пространстве с экспоненциальным весом получены единственное решение системы интегральных уравнений, используя принцип сжатых отображений.
3. Оценки устойчивости показывают непрерывную зависимость решения обратной задачи от упругих параметров Ламе и дополнительной информации о решении прямой задачи.
4. Доказана локальная однозначная разрешимость обратной задачи для системы интегро–дифференциального уравнения вязкоупругости, когда параметр Ламе в рассматриваемой среде является некоторой функцией от z, получена оценка устойчивости.
5. Доказана теорема локальной однозначной разрешимости двумерной задачи определения ядра памяти, аналитического по части пространственных координат и гладкого по временной переменной, для системы уравнений изотропной вязкоупругости для вертикально-неоднородной пористой среды.
6. Исследуется начально-краевая задача для системы двумерных интегро–дифференциальных уравнений. Обратная задача сведена к серии одномерных обратных задач. Получены теоремы глобальной однозначной разрешимости и оценки устойчивости обратных задач.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 URGENCH STATE UNIVERSITY

BUKHARA STATE UNIVERSITY

RAHMONOV ASKAR AHMADOVICH

INVERSE PROBLEM FOR THE SYSTEM INTEGRO–DEFFERENTIAL EQUATION IN A VISCO–ELASTIC POROUS MEDIUM

01.01.02–Differential Equations and Mathematical Physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

BUKHARA - 2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2020.2.PhD/FM221.

Dissertation has been prepared at Buhara State University

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-mat.urdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Durdiev Durdimurod Kalandarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Zikirov Obidjon Salijanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Yakhshimuratov Alisher Bekchanovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place «____» _____________2020 at _____ at the online meeting of Scientific Council number PhD.03/30.12.2019.FM.55.02 at Urgench State University. (Address: 14 Kh. Olimjan str., Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph.: (+99862) 224-66-11, fax: (+99862)224-67-00, e-mail: ik_mat.urdu@umail.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Urgench State University (is registered №_______) (Address: 14 Kh. Olimjan str., Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph.: (99862) 224-66-11, fax: (99862) 224-67-00), ursubox@gmail.com).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2020 year
(Mailing report №__ on «__» may 2020 year)

B.I. Abdullaev
Chairman of scientific council on award of scientific degree, Dr.ph.m.s.

A.A. Atamuratov
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degree, C.ph.m.s.

S.A. Imomkulov
Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degree, Dr.ph.m.s.

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The importance and relevance of the dissertation topic. Inverse problems for integro–differential equations of hyperbolic type are a relatively new direction in the theory of inverse problems, which arose in the late 1980s of the twentieth century. At present, many specialists from all over the world are engaged in solving inverse problems for integro–differential equations of hyperbolic and parabolic type, which should be specially emphasized, all of these problems have a physical basis. The study of inverse problems of determining the kernel of integral operators in these equations from some information on the wave field plays an important role in the study of the structure and properties of the medium. In applications, problems with delta-shaped sources concentrated in a neighborhood of a fixed point or on the boundary of a region are important. It is precisely such tasks that are considered in this thesis.

The aim of the research work is to construct methods for solving one- and twodimensional inverse dynamic problems for the system of integro–differential equations in a visco–elastic porous medium, as well as the study of the uniqueness, stability and existence of a solution to these inverse problems.

The tasks of the research work:

study of unique solvability, generalized initial-boundary value problems for the system of hyperbolic integro–differential equation with variable coefficients at the main part and with constant at lower derivatives with respect to t;

study of the global unique solvability and stability of the problem of determining a one-dimensional core for a system of equations of isotropic visco–elasticity in a vertically inhomogeneous porous medium;

proof of the uniqueness theorem in the “small” theorem on the existence of solutions to the inverse problems considered, as well as the continuous dependence of the solutions of inverse dynamic problems on the input data;

study dynamic inverse problem for the equation of visco–elasticity in a porous medium with a weakly horizontal inhomogeneity in half-space $z > 0$.

The object of the research work is one- and two-dimensional inverse problems for a system of integro–differential equations of second-order hyperbolic type.

The scientific novelty of the research work is as follows:

studied one- and two-dimensional inverse problem related to the determination of the displacement function in a system of integro–differential equations with memory for a vertically inhomogeneous isotropic medium in half-space. On the boundary of the half-space, a special Neumann condition is specified. The memory function is included in the system as the core of a convolution-type integral operator. It is proved that there is a unique global solution to the inverse problem, and estimates of its stability are obtained;

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Durdiev D.K., Rahmonov A.A. A 2D kernel determination problem in a visco–elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity. // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2020; pp. 1-21. SCOPUS, Impact Factor: 1.533.
2. Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А. Обратная задача для системы интегро–дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость. // Теоретическая и математическая физика, 2018, Т. 195, № 3, стр. 491-506. SCOPUS, Impact Factor: 0.901.
3. Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А. Задача об определении двумерного ядра в системе интегро–дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды. // Сибирский Журнал Индустриальной математики, 2020, Т. 23, № 2. С. 63-80. SCOPUS, Impact Factor: 0.680.
   English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2020, Vol. 14, №2, pp. 281-295.
4. Ikromov I.A., Rahmonov A.A. On reconstruction of distributions by spherical means. // Uzbek Mathematical Journal, 2019, № 3, pp. 49-60. (01.00.00, №6)
5. Rahmonov A.A. Coefficient determination problem in the system of integro–differential equation for visco–elastic porous medium // Uzbek Mathematical Journal, 2020, №1, p. 102-115. (01.00.00, №6)
6. Рахмонов А.А. Обратная задача для интегро–дифференциального уравнения волны SH в упруго–пористой среде. // Научный вестник Бухарского государственного университета. 2017/3 (67), С. 41-45. (01.00.00, №3)
7. Rahmonov A.A. Recovering stationary external force by distributions. // Scientific reports of Bukhara State University, 2019/4 (76), pp. 98-101. (01.00.00, №3)

II бўлим (Часть II; Part II)

8. Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А. Обратная задача для интегро–дифференциального уравнения волны SH в упруго–пористой среде // Тезисы докладов научной конференции с участием зарубежных ученых Проблемы современной топологии и её приложения. Ташкент, 11-12 мая 2017, стр. 180-182.
9. Ikromov I.A., Rahmonov A.A. On reconstruction of distributions by spherical means // «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» тезисы докладов XV Международной научной

конференции: - Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 15-20 июля, 2019, стр. 125-126.

10. Rahmonov A.A. Coefficient determination problem in the system of integro–differential equation for visco–elastic porous medium // «Inverse and ill-posed problems» The international conference, Samarkand, Uzbekistan, October 2-4, 2019, p. 25.
11. Rahmonov A.A. Recovering stationary external force by distributions // «Actual problems and applications of analysis» Materials of the republican scientific conference, Karshi, Uzbekistan, October 4-5, 2019, pp. 115-116.
12. Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А. Задача об определении двумерного ядра в вязкоупругой пористой среде со слабо горизонтальной неоднородностью // «Современные проблемы математики и прикладной математики» тезисы докладов, посвященной 100 летию академика С.Х.Сиражидинова. Ташкент, 21 мая, 2020, стр. 35-36.